Інститут математики
Національної академії наук України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Гіссенський університет (Німеччина)

Міжнародна наукова конференція

ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

присвячена 100-річчю з дня народження

Миколи Павловича Корнєйчука

Тези

16-19 вересня 2020
Дніпро, Україна

Організаційний комітет

Співголови:

Поляков М. В. (Україна)
Самойленко А. М. (Україна)

Заступники голів:

Парфінович Н. В. (Україна)
Романюк А. С. (Україна)
Шевчук І. О. (Україна)

Вчений секретар:

Пасько А. М. (Україна)

Члени оргкомітету:

Бабенко В. Ф. (Україна)
Біліченко Р. О. (Україна)
Вакарчук М. Б. (Україна)
Гончаров С.В. (Україна)
Давидов О. В. (Німеччина)
Коваленко О. В. (Україна)
Козиненко О. В. (Україна)
Конарева С. В. (Україна)
Кофанов В. О. (Україна)
Лескевич Т. Ю. (Україна)
Моторний В. П. (Україна)
Назаренко М. О. (Україна)
Поляков О. В. (Україна)
Руденко О. О. (Україна)
Скороходов Д. С. (Велика Британія)
Ткаченко М. Є. (Україна)
Трактинська В. М. (Україна)

Програмний комітет

Бабенко В. Ф. (Україна)
Вакарчук С. Б. (Україна)
Давидов О. В. (Німеччина)
Кореновський А. О. (Україна)
Кофанов В. О. (Україна)
Кротов В. Г. (Білорусь)
Луковський І. О. (Україна)
Макаров В. Л. (Україна)
Моторний В. П. (Україна)
Осколков К. І. (США)
Парфінович Н. В. (Україна)
Пічугов С. О. (Україна)
Романюк А. С. (Україна)
Романюк В. С. (Україна)
Савчук В. В. (Україна)
Сердюк А. С. (Україна)
Скороходов Д. С. (Велика Британія)
Шабозов М. Ш. (Таджикістан)
Шевчук І. О. (Україна)
Шумейко О. О. (Україна)

Bernstein-Nikolskii-type inequalities for algebraic polynomials in Bergman space

F.G. Abdullayev

Let $\mathbb{C}$ be a complex plane and $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; $G \subset \mathbb{C}$ be a bounded Jordan region with boundary $L := \partial G$ such that $0 \in G$; $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G} = extL$; $\Delta := \Delta(0,1) := \{w : |w| > 1\}$. Let $w = \Phi(z)$ be the univalent conformal mapping of Ω onto Δ such that $\Phi(\infty) = \infty$ and $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$; $\Psi := \Phi^{-1}$. For $R > 1$, we take $L_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$, $G_R := intL_R$ and $\Omega_R := extL_R$. Let $\wp_n$ denotes the class of all algebraic polynomials $P_n(z)$ of degree at most $n \in \mathbb{N}$.

Let $\{z_j\}_{j=1}^m$ be the fixed system of distinct points on the curve L. For some fixed R_0, $1 < R_0 < \infty$, consider generalized Jacobi weight function $h(z)$ which is defined as follows:

$$h(z) := \prod_{j=1}^{m} |z - z_j|^{\gamma_j}, \quad z \in G_{R_0},$$

where $\gamma_j > -2$, for all $j = 1, 2, ..., m$.

Let $0 < p \leq \infty$ and σ be the two-dimensional Lebesque measure. For the Jordan region G, we introduce:

$$\|P_n\|_p := \|P_n\|_{A_p(h,G)} := \left(\iint_G h(z) |P_n(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{1/p}, \; 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_\infty := \|P_n\|_{A_\infty(1,G)} := \max_{z\in\overline{G}} |P_n(z)|, \; p = \infty,$$

and $A_p(1, G) \equiv A_p(G)$.

We study the following

$$\|P_n^{(m)}\|_X \leq \lambda_n(G, h, p)\|P_n\|_Y$$

Bernstein ($X = Y = A_\infty$)-Markov ($X = Y = A_p, p > 0$)- type and Nikolskii ($m = 0; X = A_q, Y = A_p$, $0 < p < q < \infty$) - type inequalities in Bergman space for all polynomials $P_n \in \wp_n$ and any $m = 0, 1, 2, ...$, where $\lambda_n := \lambda_n(G, h, p, m) > 0$, $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, is a constant, depending on the geometrical properties of the region G and the weight function h in general.

Kyrgyz-Turkish Manas University, Kyrgyz Republic,
Mersin University, Turkey
e-mail: fahreddin.abdullayev@manas.edu.kg

Jackson type inequalities in the Musielak-Orlicz type spaces

F.G. Abdullayev, S.O. Chaichenko, A.L. Shidlich

Let $\mathbf{M} = \{M_k(u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $u \geq 0$, be a sequence of nondecreasing convex functions, $M_k(0) = 0$, $M_k(u) \to \infty$ as $u \to \infty$. The modular space (or Musilak-Orlicz space) $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}$ is the space of 2π-periodic Lebesgue summable functions f, defined on the real axis such that the following quantity (the Orlicz norm of f) is finite:

$$\|f\|^*_{\mathbf{M}} := \sup\Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k|\widehat{f}(k)| : \quad \lambda_k \geq 0, \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_k(\lambda_k) \leq 1\Big\},$$

where $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ are the Fourier coefficients of the function f.

Consider the set Φ of all continuous bounded nonnegative pair functions φ such that $\varphi(0) = 0$ and the Lebesgue measure of the set $\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = 0\}$ is equal to zero. For a fixed function $\varphi \in \Phi$ and for any $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}$, we define the generalized modulus of smoothness ω_φ of a function $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}$ by the equality:

$$\omega_\varphi(f,\delta)^*_{\mathbf{M}} := \sup_{|h|\leq\delta}\sup\Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k|\varphi(kh)\widehat{f}(k)| : \quad \lambda_k \geq 0, \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_k(\lambda_k) \leq 1\Big\}, \ \delta \geq 0.$$

For any function $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}$, denote by $E_n(f)^*_{\mathbf{M}}$ its best approximation by the trigonometric polynomials of the order $n-1$ in the space $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}$.

Let $\mathcal{M}(\tau)$, $\tau > 0$, be a set of bounded nondecreasing functions μ that differ from a constant on $[0,\tau]$.

In the following assertion, we present the Jackson type inequalities in the spaces $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}$ with the constants that are the best possible in some important cases.

Theorem. *Assume that $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}$. Then for any $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $\varphi \in \Phi$, the following inequality holds:*

$$E_n(f)^*_{\mathbf{M}} \leq C_{n,\varphi}(\tau)\,\omega_\varphi\Big(f, \frac{\tau}{n}\Big)^*_{\mathbf{M}},$$

where

$$C_{n,\varphi}(\tau) := \inf_{\mu\in\mathcal{M}(\tau)} \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi}(\tau,v)}, \quad I_{n,\varphi}(\tau,\mu) := \inf_{k\in\mathbb{N}:k\geq n}\int\limits_0^\tau \varphi\Big(\frac{ku}{n}\Big)d\mu(u). \qquad (1)$$

There exists a function $\mu^* \in \mathcal{M}(\tau)$ that realizes the greatest lower bound in (1).

Kyrgyz-Turkish Manas University, Mersin University
e-mail: fahreddin.abdullayev@manas.edu.kg

Donbas State Pedagogical University
e-mail: s.chaichenko@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
e-mail: shidlich@gmail.com

Widths of functional classes defined by majorants of generalized moduli of smoothness in $\mathcal{S}^p$

F.G. Abdullayev, A.S. Serdyuk, A.L. Shidlich

Let $\mathcal{S}^p$, $1 \le p < \infty$, be the space of 2π-periodic complex-valued Lebesgue summable functions f, defined on the real axis ($f \in L$) with finite norm $\|f\|_p := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p)^{1/p}$, where $\widehat{f}(k) = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$ are the Fourier coefficients of f. Let also $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of complex numbers. If $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k)\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ is the Fourier series of a certain function $F \in L$, then F is called ψ-integral of f. In turn, the function f is called the ψ-derivative of the function F and is denoted as $f = F^\psi$. The set of ψ-integrals of $f \in \mathcal{S}^p$ is denoted as $L^\psi\mathcal{S}^p$.

Further, let Φ be the set of all continuous bounded non-negative pair functions $\varphi(t)$ such that $\varphi(0) = 0$ and $\mathrm{mes}\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = 0\} = 0$. Let also $\mathcal{M}(\tau)$, $\tau > 0$, be the set of all functions μ, bounded non-decreasing and non-constant on $[0, \tau]$. For a fixed $\varphi \in \Phi$, define the generalized modulus of smoothness of $f \in \mathcal{S}^p$ by

$$\omega_\varphi(f, t)_p := \sup_{|h|\le t}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^p(kh)|\widehat{f}(k)|^p\Big)^{1/p}, \quad t \ge 0,$$

and the average value of $\omega_\varphi(f, t)_p$ with the weight $\mu \in \mathcal{M}(\tau)$ by the equality

$$\Omega_\varphi(f, \tau, \mu, u)_p := \bigg(\frac{1}{\mu(\tau) - \mu(0)}\int_0^u \omega_\varphi^p(f, t)_p \mathrm{d}\mu\Big(\frac{\tau t}{u}\Big)\bigg)^{1/p}, \quad u > 0.$$

For arbitrary fixed $\varphi \in \Phi$, $\tau > 0$ and $\mu \in \mathcal{M}(\tau)$, we set

$$L^\psi(\varphi, \tau, \mu, n)_p := \Big\{f \in L^\psi\mathcal{S}^p : \quad \Omega_\varphi(f^\psi, \tau, \mu, \tau/n)_p \le 1, \quad n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Theorem. *Let $1 \le p < \infty$, $\tau > 0$, $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of complex numbers such that $|\psi(k)| = |\psi(-k)| \ge |\psi(k + 1)|$, the function $\varphi \in \Phi$ be non-decreasing on $[0, \tau]$ and $\mu \in \mathcal{M}(\tau)$. Then for any $n \in \mathbb{N}$ and $N \in \{2n - 1, 2n\}$,*

$$\bigg(\frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\int_0^\tau \varphi^p(t)\mathrm{d}\mu(t)}\bigg)^{1/p}|\psi(n)| \le P_N(L^\psi(\varphi, \tau, \mu, n)_p, \mathcal{S}^p) \le \bigg(\frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau, \mu)}\bigg)^{1/p}|\psi(n)|,$$

where $I_{n,\varphi,p}(\tau, \mu) := \inf\limits_{k\in\mathbb{N}: k\ge n} \int_0^\tau \varphi^p(\frac{kt}{n})\mathrm{d}\mu(t)$, and P_N is linear, projective, Bernstein or Kolmogorov width. If, in addition, $I_{n,\varphi,p}(\tau, \mu) = \int_0^\tau \varphi^p(t)\mathrm{d}\mu(t)$, then

$$P_N(L^\psi(\varphi, \tau, \mu, n)_p, \mathcal{S}^p) = \bigg(\frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\int_0^\tau \varphi^p(t)\mathrm{d}\mu(t)}\bigg)^{1/p}|\psi(n)|.$$

Kyrgyz-Turkish Manas University, Mersin University
e-mail:
fahreddin.abdullayev@manas.edu.kg

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
e-mail:
sanatolii@ukr.net

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
e-mail:
shidlich@gmail.com

Korneichuk–Stechkin Lemma for L-space Valued Functions and Some Applications

V.F. Babenko, V.V. Babenko, O. V. Kovalenko

We prove an anlogue of the Korneichuk–Stechkin lemma for functions with values in L-spaces. As applications, we obtain sharp Ostrowski type inequalities and solve problems of optimal recovery of identity and convexifying operators, as well as the problem of integral recovery, on the classes of L-space valued functions with given majorant of modulus of continuity. The recovery is done based on n mean values of the functions over some intervals. Moreover, on the classes of functions with given majorant of modulus of continuity of their Hukuhara type derivative, we solve the problem of optimal recovery of the function and the Hukuhara type derivative. The recovery is done based on n values of the function. We also obtain some sharp Landau type inequalities and solve an analogue of the Stechkin problem about approximation of unbounded operators by bounded ones and the problem of optimal recovery of an unbounded operator on a class of elements, known with error. Consideration of L-space valued functions gives a unified approach to solution of the mentioned above extremal problems for the classes of multi- and fuzzy-valued functions as well as for the classes of functions with values in Banach spaces, in particular random processes, and many other classes of functions.

Dniprovski National
University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Drake University
Des Moines, USA
e-mail: vera.babenko@gmail.com

Dniprovski National
University
e-mail: olegkovalenko90@gmail.com

Optimal recovery and best approximation in function L-spaces

V.V. Babenko, V.F. Babenko

We consider the problem of approximation of unbounded positively homogeneous operators in L-spaces using Lipschitz operators. In this talk, we discuss its connection to the problem of computing modulus of continuity of the unbounded operator on the class of elements, as well as, to the problem of optimal recovery of an unbounded operator by a Lipschitz one on the class of elements given with an error. As applications, we consider the problem of approximation of unbounded operator, that for functions with values in some L-space puts in a correspondence Hukuhara-type derivatives, by Lipschitz operators. Further, we discuss the solution of the problem of the optimal recovery of this operator on the class of functions that have Hukuhara-type derivative with the given majorant of the modulus of continuity.

Drake University
e-mail: vira.babenko@drake.edu

Dnipro National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Sharp Inequalities for the Norms of Multiple Closed Operators on Hilbert Space

V. F. Babenko, Yu. V. Babenko, N. A. Kriachko, D. S. Skorokhodov

We present a unified approach to obtain sharp mean-squared inequalities of Hardy-Littlewood-Polyá and Taikov types for multiple closed operators acting on Hilbert space that is based on the paper [1]. As direct consequences, we demonstrate how sharp multiplicative forms of these inequalities can be derived. We apply our results to establish new exact inequalities for the norms of powers of the Laplace-Beltrami operators on compact Riemmanian manifolds that include the well-known Taikov and Hardy-Littlewood-Polyá inequalities for functions defined on a period and on d-dimensional sphere as particular cases, and on d-dimensional space as a limiting case. Among other applications of our results we consider the problem of the best approximation of unbounded operators by linear bounded ones and the problem of the best approximation of one class by elements of another class.

In addition, using a technique unrelated to above results, we prove sharp Solyar-type inequality for unbounded operators.

Theorem 1. *Let H be a Hilbert space over $\mathbb{C}$, X be a Banach space over $\mathbb{C}$ and X^* be its dual. Let $A : X \to H$ be closed operator with domain $\mathcal{D}(A)$ having closed range and $A^* : H \to X^*$ be its dual operator. Then, for every $x \in \mathcal{D}(A^*A)$,*

$$\|Ax\|_H^2 \leqslant \|x\|_X \|A^*Ax\|_{X^*}.$$

This inequality is sharp in the following sense

$$\sup_{x \notin \ker A} \frac{\|Ax\|_H^2}{\|x\|_X \|A^*Ax\|_{X^*}} = 1.$$

Above result relies on its analogue for bounded operators established in paper [2]. Also, we obtain consequences of Theorem 1 for powers of Laplace-Beltrami operators on compact Riemannian manifolds.

[1] V. F. Babenko, A. A. Ligun, A. A. Shumeiko, On the sharp inequalities of Kolmogorov type for operators in Hilbert spaces. – Visnyk DNU, Ser.Matem., – 2006. – **11**. – P. 9–13.

[2] V. Babenko, O. Samaan, On inequalities of Kolmogorov type for operators acting into Hilbert space and some applications. – Visnyk DNU, Ser. Matem. – 2003. – **8**. – P. 11–18.

Oles Honchar
Dnipro National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Kennesaw State
University
e-mail: ybabenko@kennesaw.edu

Oles Honchar
Dnipro National University
e-mail: nadiakriachko@gmail.com

Oles Honchar
Dnipro National University
e-mail: dmytro.skorokhodov@gmail.com

Study of Padé-type approximants for pseudo-twovariate functions

L.O. Chernetska

Generalized moment representations are used to study the so-called pseudo-twovariate functions

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{s}_{k+m}z^k w^m=\frac{z\widetilde{f}(z)-w\widetilde{f}(w)}{z-w},$$

where

$$\widetilde{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{s}_k z^k.$$

We construct Padé-type approximants explicitly for Humbert confluent hypergeometric series

$$f(z,w)=\Phi_2(1,1,\nu+\sigma+2,z,w)=$$

$$=\frac{z\ {}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;z)-w\ {}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;w)}{z-w},\nu,\sigma>-1.$$

We consider the partial case for $\nu+\sigma=-1$:

$$f(z,w)=\frac{we^w-ze^z}{w-z}.$$

The Institute of Mathematics of NASU
e-mail: liliia.cher.liliia@gmail.com

Best approximation constants for trigonometric functions

O.V. Chernitskaya

Let $C_p(f)$ be the constant of the best approximation of the function f in the metric of space $L_p[a,b]$, that is, such a constant that

$$\|f - C_p(f)\|_p = \inf \left\{ \|f - C\|_p : C \in R \right\}.$$

The criterion for the best approximation constant in spaces $L_p[a,b]$ is proved in [1].

The properties of the best approximation constants and the behavior of the constants' sequences $\{C_n(f)\}$ were studied. The hypothesis of the monotonicity of these sequences for the functions of monotonic and convex ones was put forward.

Students of the Faculty of Applied Mathematics have created programs to calculate the constants of the best approximation. The programs investigated the behavior of sequences of constants $\{C_n(f)\}$ with respect to monotonicity for functions having the following properties: 1) the function is monotone and convex, 2) the function is convex and changes the direction of monotonicity, 3) the function changes the direction of convexity and monotonicity. Trigonometric functions were considered.

Some of the results: for functions 1) $f(t) = \sin t$ on the segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, 2) $f(t) = \sin t$ on the segment $[0, \pi]$, 3) $f(t) = \sin 3t$ on the segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ the sequences of the best-approximation constants $\{C_n(f)\}$ have a monotonous behavior.

1. Корнейчук, Н.П. Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М., 1987. – 424 с.

Oles Honchar Dnipro
National University
e-mail: chernitskaya.olga@ukr.net

Spectral Convergence and Stability of a B-Spline Method for Heat Equation

O. Davydov

We consider Galerkin discretization of the heat equation

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x},t) - \Delta u(\boldsymbol{x},t) = \eta(\boldsymbol{x},t),\ t>0, \quad u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega = (0,1)^d,$$

with either periodic or homogeneous Dirichlet boundary conditions, using tensor products of the spaces $\tilde{X}^{h,p}$ of 1-periodic splines of degree p with equidistant knots ih, $i = 1, \ldots, N$, or respectively, the spaces $X_0^{h,p}$ of splines vanishing at the endpoints of $[0,1]$. Tensor product B-splines are used as basis functions.

Spectral (exponentially decaying as $p \to \infty$) error bounds are obtained for the semi-discrete approximate solutions under appropriate assumptions about the smoothness of the data η and u_0, as well as for the solution obtained after applying the θ-scheme in time.

In addition, we investigate conditions for the stability of the time stepping scheme in the case $1/2 < \theta \leq 1$, and show that the largest CFL constant σ that guarantees stability of the θ-scheme when the time step δt satisfies $\delta t/h^2 \leq \sigma$ is given in the periodic case by

$$\sigma = \frac{2K_{2p+1}}{(2\theta-1)d\pi^2 K_{2p-1}} \leq \frac{16}{(2\theta-1)d\pi^4}, \tag{1}$$

where K_m denotes the Favard constant. In the Dirichlet case the CFL constant satisfies

$$\sigma \geq \frac{2}{(2\theta-1)d}(h\mu_{hp}^0)^{-2}, \tag{2}$$

where μ_{hp}^0 is the L^2-norm Markov constant for $X_0^{h,p}$ defined by

$$\mu_{hp}^0 := \sup\{\|v'\|_{L^2(0,1)} : v \in X_0^{h,p},\ \|v\|_{L^2(0,1)} \leq 1\}. \tag{3}$$

Since $h\mu_{hp}^0 \leq 2(p+2)^2/\pi$, it follows that $\sigma \geq \dfrac{\pi^2}{2(2\theta-1)d(p+2)^4}$. However, numerical evidence suggests that σ behaves as c/p^2 when $p \to \infty$ if h is sufficiently small. Knowing more about asymptotic behavior of μ_{hp}^0 as $h \to 0$ and $p \to \infty$ would help to provide better estimates of σ in this case.

This is a joint work with Mark Ainsworth and Hongrui Wang.

JLU University of Giessen
e-mail: oleg.davydov@math.uni-giessen.de

Adaptive approximation by sums of piecewise polynomials on sparse grids

O. Davydov, O. Kozynenko, D. Skorokhodov

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, be a bounded domain. We call a partition $\triangle$ of Ω *convex* if every cell $\omega \in \triangle$ is convex. For $N \in \mathbb{N}$, denote by $\mathcal{P}_N$ the set of all convex partitions of Ω comprising at most N cells.

For a function $f \in L_p(\Omega)$ we define its *N-term approximation error* by $\sigma_N(f, \mathcal{D})_p = \inf\limits_{g_i \in \mathcal{D}, i=1,\ldots,N} \left\| f - \sum\limits_{i=1}^{N} c_i g_i \right\|_{L_p(\Omega)}$, where $c_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, \ldots, N$ and $\mathcal{D}$ is an arbitrary set of functions in $L_p(\Omega)$ (*dictionary*). In our case of piecewise constant approximation, we consider dictionaries: $\mathcal{D}_C$ – set of characteristic functions of arbitrary convex sets, and $\mathcal{D}_S$ – set of characteristic functions of arbitrary simplexes.

It is easy to see that $\sigma_N(f, \mathcal{D}_C)_\infty \geqslant \frac{const}{N}$ for any measurable function.

It has been shown in [1] that piecewise constants on a partition which consist of N convex polyhedra provide the L_p-approximation order $O(N^{-2/(d+1)})$ for functions from Sobolev space W_q^2, where d is the number of variables, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ and $1 \leqslant q < \infty$ satisfy inequality $\frac{2}{d+1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant 0$. This order cannot be further improved for any function whose Hessian is positive definite at some point [2]. This implies $\sigma_N(f, \mathcal{D}_S) = O(N^{2/(d+1)})$ for such functions. Although still suffering from the curse of dimensionality, this bound is significantly better than the standard order $O(N^{-1/d})$ expected from piecewise constants on isotropic partitions.

On the other hand, it is easy to see that piecewise constant sparse grids approximation implies $\sigma_N(\mathcal{D}_S)_p = O(N^{-1} \ln^{2(d-1)} N)$ for functions in Sobolev spaces with dominating mixed derivatives. We improve this bound and show that piecewise constant sparse grids approximation as linear combinations of Haar tensor product functions leads to to $\sigma_N(\mathcal{D}_S)_p = O(N^{-1} \ln^{3(d-1)/2} N)$ for $1 < p < \infty$. Case $d = 2$, $p = 2$ was previously proved in [3]. Also, using a modification of the sparse grid approximation by employing some techniques of [1-2], in the 2D case we improve this error from $\sigma_N(f, \mathcal{D}_S)_\infty = O(N^{-1} \ln^2 N)$ to $\sigma_N(f, \mathcal{D}_S)_\infty = O(N^{-1} \ln N)$.

1. O. Davydov, O. Kozynenko, D. Skorokhodov, Optimal approximation order of piecewise constants on convex partitions, arXiv:1904.09005.

2. O. Davydov, Approximation by piecewise constants on convex partitions, J. Approx. Theory, 164 (2012), 346-352. doi:10.1016/j.jat.2011.11.001

3. P. Oswald, On N-term approximation by Haar functions in H^s-norms, in Approximation and Fourier Series (S. M. Nikolskij, B. S. Kashin, A. Izaak, eds.), AFC, Russian Academy of Science, 1998

University of Giessen
e-mail: Oleg.Davydov@math.uni-giessen.de

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: kozinenkoalex@gmail.com, dmitriy.skorokhodov@gmail.com

The Abstract Approximations of the Identity

G.A. Karagulyan, I.N. Katkovskaya, V.G. Krotov

Let X be the metric space with metric d and Borel measure μ, such that

$$\exists\, a_\mu \geq 1 \quad \mu(B(x,2r)) \leq a_\mu \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r > 0,$$

$$\exists\, C_1, C_2 > 1 \quad \mu(B(x,C_1 r)) \geq C_2 \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r > 0.$$

The following weak type inequality is true

$$\mu\{\mathcal{N}_\lambda f > A\} \leq (C_\varphi + C_\lambda^p) \left(\frac{\|f\|_{L^p(X)}}{A} \right)^p,\ A > 0,\ f \in L^p(X).$$

Here

$$\mathcal{F}_t f(x) = \int\limits_X \varphi_t(x,z) f(z)\, d\mu(z),$$

$$\mathcal{N}_\lambda f(x) = \sup\{|\mathcal{F}_t f(y)| : d(x,y) < \lambda(t)\},$$

where the function $\lambda : (0,1] \to (0,1]$ increases, $\lambda(+0) = 0$,

$$C_\lambda^p := \sup_{t\in(0,1]} \sup_{x\in X} [\mu(B(x,\lambda(t)))]^{1/p} \left(\int\limits_{B(x,\lambda(t))} |\varphi_t(x,z)|^q\, d\mu(z) \right)^{1/q},$$

for $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$,

$$C_\lambda^1 := \sup_{t\in(0,1]} \sup_{x\in X} \mu(B(x,\lambda(t))) \sup_{y,z\in B(x,\lambda(t))} |\varphi_t(y,z)|$$

and

$$C_\varphi := \sup_{t\in(0,1]} \sup_{x\in X} \|\varphi_t^*(x,\cdot)\|_{L^1(X)},$$

where

$$\varphi_t^*(x,y) := \sup\{|\varphi_t(x,z)| : d(x,y) \leq d(x,z)\}.$$

Our inequality give exact form of Fatou domains for many classic approximations of the identity.

Institute of Mathematics of NAS RA
e-mail: g.karagulyan@gmail.com

Sakharov Institute, BSU
e-mail: katkovskaya.irina@mail.ru

BSU
e-mail: krotov@bsu.by

On Some Finite Difference Properties of Conformal Homeomorphisms

O.W. Karupu

Let G_1 and G_2 be the simply connected domains in the complex plane bounded by the smooth Jordan curves Γ_1 and Γ_2. Let $\tau_1(s_1)$ be the angle between the tangent to Γ_1 and the positive real axis, $s_1(z)$ be the arc length on Γ_1. Let $\tau_2(s_2)$ be the angle between the tangent to Γ_2 and the positive real axis, $s_2(w)$ be the arc length on Γ_2. Let $w = f(z)$ be a homeomorphism of the closure $\overline{G_1}$ of the domain G_1 onto the closure $\overline{G_2}$ of the domain G_2, conformal in open domain G_1.

Let $\omega_{k,z}(f(z), \delta)$ be a noncentralized local arithmetic modulus of smoothness of order k ($k \in \mathbb{N}$) of the function $w = f(z)$ at a point z on the curve γ (see [1]). Let consider the integral modulus of smoothness of order k for the function $w = f(z)$ on the curve γ introduced [2] by the formula $\widehat{\omega}_k(f(z), \delta) = \left(\int\limits_\gamma [\omega_{k,z}(f(z), \delta)]^p \, d\lambda(z) \right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, where $\lambda(z)$ is the linear Lebesgue's measure on the curve.

Let integral moduli of smoothness $\widehat{\omega}_k(\tau_1(s_1), \delta)$ and $\widehat{\omega}_k(\tau_2(s_2), \delta)$ of order k ($k \in \mathbb{N}$) for the functions $\tau_1(s_1)$ and $\tau_2(s_2)$ satisfy conditions $\widehat{\omega}_k(\tau_1(s_1), \delta) = O(\omega(\delta))$ $(\delta \to 0)$, $\widehat{\omega}_k(\tau_2(s_2), \delta) = O(\omega(\delta))$ $(\delta \to 0)$, where $\omega(\delta)$ is normal majorant satisfying the condition $\int\limits_0^l \frac{\omega(t)}{t} dt < +\infty$. Then integral modulus of smoothness $\widehat{\omega}_k(f'(z), \delta)$ of the derivative of the function $w = f(z)$ on Γ_1 satisfies the condition $\widehat{\omega}_k(f'(z), \delta) = O(\sigma(\delta))$ $(\delta \to 0)$, where $\sigma(\delta)$ is some integral majorant.

In partial case (see [3]), when integral moduli of smoothness $\widehat{\omega}_k(\tau_1(s_1), \delta)$ and $\widehat{\omega}_k(\tau_2(s_2), \delta)$ of order k satisfy Holder condition $\widehat{\omega}_k(\tau_1(s_1), \delta) = O(\delta^\alpha)$ $(\delta \to 0)$ and $\widehat{\omega}_k(\tau_2(s_2), \delta) = O(\delta^\alpha)$ $(\delta \to 0)$, $0 < \alpha < k$, integral modulus of smoothness $\widehat{\omega}_k(f'(z), \delta)$ on Γ_1 satisfies Holder condition with the same index α.

[1] P. M. Tamrazov, *Smoothnesses and polynomial appoximations*, Kiev: Naukova dumka, 1975. [in Russian].

[2] P. M. Tamrazov, *Finite difference identities and estimates for moduli of smoothness of composite functions*, Kiev: Institute of mathematics of Ukrainian Academy of sciences Publishers, 1977. [in Russian].

[3] O. W. Karupu *On some properties of integral moduli of smoothness of conformal mappings*, Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations. **LXII** (2012), no. 2, 111–116.

National Aviation University
e-mail: karupu@ukr.net

Asymptotics of Approximation of Functions from Lipschitz Classes by Conjugate Poisson Integrals

Yu.I. Kharkevych, K.V. Pozharska

Let C be a space of 2π-periodic continuous functions equipped with the norm $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Denote by W^r a set of 2π-periodic functions with absolutely continuous derivatives up to order $r-1$ such that $\operatorname{ess\,sup}\limits_t \left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$.

The set of functions that are conjugate to those from the class W^r is denoted by $\overline{W}^r$. That is $\overline{W}^r = \left\{\bar{f}:\ \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t,\ f \in W^r\right\}$. Any $f \in C$ is contained in the class Lip 1, if $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\ |f(t_1) - f(t_2)| \le |t_1 - t_2|$.

The quantity $\bar{P}_\rho(f;x) = P_\rho(\bar{f};x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k \sin kt\,\mathrm{d}t$ is called the conjugate Poisson integral of the function f.

Approximation properties of the method of approximation by Poisson integrals on the classes of differentiable functions are well studied (here we mention the well-known names of Natanson, Timan, Malei, Stark, Baskakov, etc.). Simultaneously, on the classes of conjugate functions this method is studied not enough. Here we mention the papers by Nagy [1] and Baskakov [2]. The talk is devoted to the results on the Kolmogorov–Nikol'skii problem [3], i.e. complete asymptotic decomposition of the quantity

$$\mathcal{E}\big(\mathrm{Lip}\ 1; \overline{P}_\rho\big)_C = \sup_{f \in \mathrm{Lip}\ 1} \left\|\overline{f}(\cdot) - \overline{P}_\rho(f;\cdot)\right\|_C.$$

The decomposition gives a possibility to write down the Kolmogorov–Nikol'skii constants of arbitrary order.

1. Sz.-Nagy B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1** (1950), 183-188.

2. Baskakov V.A. Asymptotic estimates for approximation of conjugate functions by conjugate Abel-Poisson integrals, Application of Functional Analysis to Approximation Theory. **5** (1975), 14-20. (in Russian)

3. Stepanets A.I. Uniform approximation by trigonometric polynomials, Naukova Dumka, Kyiv, 1981. (in Russian)

Lesya Ukrainka Eastern European National University
e-mail: kharkevich.juriy@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
01024 Kyiv, Ukraine
e-mail: kate.shvai@gmail.com

On correlation sharp Kolmogorov type inequalities with sharp Kolmogorov-Remez type inequalities

V.A. Kofanov

We establish the theorem on correlation the sharp Kolmogorov type inequalities with the sharp Kolmogorov-Remez type inequalities. As a special case, we prove new sharp Kolmogorov-Remez and Bernstein-Remez type inequalities.

Let $I_{2\pi}$ be the unite circle which is realized as interval $[0, 2\pi]$ with coincident endpoint. Denote by φ_r the 2π-periodic spline of Euler of order r and let $L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : \ [a,b] \subset I_{2\pi}, \ |x(t)| > 0, \ t \in (a,b)\right\}$.

Some new results are presented in the following theorems.

Theorem 1. *Let $k \in \mathbf{N}$; $q \geq 2$, $p \leq 1$. Then for arbitrary function $x \in L^{2k}_\infty$, satisfying $L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \ \|x\|_{L_p(I_{2\pi})}$, and any measurable set $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, where λ is such that $\|x\|_{L_p(I_{2\pi})} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})}\|x^{(2k)}\|_\infty$, the following sharp inequality holds*

$$\|x^{(k)}\|_q \leq \|\varphi_k\|_q \left\{\frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_{2k}\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}}\right\}^\alpha \|x^{(2k)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

where $\alpha = (k+1/q)/(2k+1)$. The inequality become equality for $x(t) = \varphi_r(t)$ and $B = B_1 := \left[\frac{-\pi-\beta/2}{2}, \frac{-\pi+\beta/2}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\pi-\beta/2}{2}, \frac{\pi+\beta/2}{2}\right]$.

Theorem 2. *Let $k, n \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\beta \in [0, 2\pi)$. If a trigonometric polynomial T of order at most n is such that $L(T)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \ \|T\|_{L_p(I_{2\pi})}$, then for any $q \geq p$ and arbitrary measurable set $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, the following sharp inequality holds*

$$\|T^{(k)}\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\sin(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\sin(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\,.$$

The inequality become equality for $T(t) = \sin t$ and $B = B_1$.

We prove also the same theorem for polynomial splines.

Dniprovski National University
e-mail: vladimir.kofanov@gmail.com

On optimal recovery of integrals of random processes

Oleg Kovalenko

Let $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ be a probability space, which will be the domain of all random variables considered below. For a random variable η, set $\|\eta\|_\infty := \operatorname{esssup}_{w\in\Omega}|\eta(w)|$. Denote by $\mathcal{R}$ the space of all random variables η such that $\eta(w) \in [0,1]$ for all $w \in \Omega$. For a concave modulus of continuity ω denote by $\mathcal{H}^\omega$ the set of all measurable random processes ξ_t, $t \in [0,1]$, such that

$$\mathbf{E}|\xi_\tau - \xi_\theta| \le \omega(\|\tau - \theta\|_\infty) \text{ for all } \eta, \tau \in \mathcal{R}.$$

Let $n \in \mathbb{N}$ and random variables $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathcal{R}$ be given. For an arbitrary function $\varphi\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, the operator $S = S_n^\varphi(\xi; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \varphi(\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n})$ is called a method of recovery of the integral $\int\limits_0^1 \xi_t dt$ of the random process $\xi \in \mathcal{H}^\omega$. The number

$$e(\tau_1, \ldots, \tau_n; S) := \sup_{\xi\in\mathcal{H}^\omega} \mathbf{E}\left|\int\limits_0^1 \xi_t dt - S_n^\varphi(\xi; \tau_1, \ldots, \tau_n)\right|$$

is called the error of recovery of the method S. We consider the following problem. For fixed $n \in \mathbb{N}$ and $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathcal{R}$, find the value of the optimal recovery

$$E(\tau_1, \ldots, \tau_n) := \inf_S e(\tau_1, \ldots, \tau_n; S),$$

and the optimal method of recovery S, on which the infimum is attained.

For $t \ge 0$ set $I(t) := \int\limits_0^t \omega(s)ds$. The following theorem gives a solution to the integral optimal recovery problem in a special case, when $\tau_1, \ldots, \tau_n$ contain "one degree of randomness".

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathcal{R}$ and the numbers $0 = t_1 < \ldots < t_n$ be such that $\tau + t_n \le 1$ almost everywhere. Set $\tau_k := \tau + t_k$, $k = 1, \ldots, n$, and $t^* := \left\|\tau - \frac{1-t_n}{2}\right\|_\infty$. Then*

$$E(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 2\sum_{k=1}^{n-1} I\left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right) + I\left(\frac{1-t_n}{2} - t^*\right) + I\left(\frac{1-t_n}{2} + t^*\right).$$

The optimal recovery method is $S = \sum\limits_{k=1}^n c_k^* \xi_{\tau_k}$, where $c_1^* = \tau + \frac{t_2 - t_1}{2}$, $c_k^* = \frac{t_{k+1} - t_{k-1}}{2}$, $k = 2, \ldots, n-1$ and $c_n^* = 1 - \tau - \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$.

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: olegkovalenko90@gmail.com

On the Śleszyńsky-Pringsheim Theorem for Three-dimensional Generalization of Continued Fraction

K.Y. Kuchminska

A large number of analytic functions are known to have continued fractions representations. Frequently a given function will be represented by several different continued fractions, each with its own behavior.

One of the approaches to represent analytic functions by continued fractions is the construction of a corresponding continued fraction. This formal continued fraction expansion is obtained by requiring that the Laurent expansion of the nth approximant agree term by term with a given Laurent series L up to the ν_n power of z, where z tends to infinity with n. Continued fractions defined in this way are said to correspond to the series L (or to the function $f(z)$ of which L is a Laurent expansion).

For the function of n $(n \geq 2)$ complex variables, the corresponding multidimensional continued fractions are also constructed, the study of which requires knowledge of their properties. From this connection we consider both a three-dimensional generalization of a continued fraction and the absolute convergence of this generalized fraction. Using the majorant method an analogue of Śleszyńsky-Pringsheim's theorem is proved.

Correspondence definition is being formulated, and algorithms of the formal multiple power series expansion into the corresponding multidimensional continued fraction with the order of correspondence of its n-th approximants n and $2n+1$ have been constructed.

Pidstryhach Institute for
Applied Problems in
Mechanics and Mathematics
of the NAS of Ukraine
e-mail: khkuchminska@gmail.com

General Forms of the Menshov–Rademacher, Tandori, and Orlicz Theorems

V.A. Mikhailets, A.A. Murach

The classical Menshov–Rademacher, Tandori, and Orlicz theorems remain valid for orthogonal series in the direct integral $\mathbf{L}_2$ of an arbitrary measurable collection $\{H(x) : x \in X\}$ of (either real or complex) Hilbert spaces [1]. Here, (X, μ) is any measurable space with an arbitrary (σ-additive) measure $\mu \geq 0$. Specifically, these theorems hold for the space $L_2(X, d\mu; H)$ of functions taking their values in a Hilbert space H of an arbitrary dimension [2].

Let $\Phi := (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ be an orthonormal system in $\mathbf{L}_2$. Consider the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \varphi_n(x), \quad \text{where} \quad a := (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \text{ (or } \mathbb{C}), \quad x \in X. \tag{1}$$

Let $S^*(\Phi, a, x)$ be the supremum of norms in $H(x)$ of partial sums of (1).

Theorem 1 (a general form of the Menshov–Rademacher theorem). *If*

$$L := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \, \log_2^2(n+1) < \infty,$$

then (1) *converges μ-almost everywhere (a.e.) on X, and $\|S^*(\Phi, a, \cdot)\|_{L_2(X, d\mu)} \leq K\sqrt{L}$, where $K > 0$ is some absolute constant (we may take $K = 4$).*

Theorem 2 (a general form of the Tandori theorem). *Assume that*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2 \, \log_2^2 n \Bigr)^{1/2} < \infty,$$

where $\nu_k := 2^{2^k}$. Then series (1) *converges unconditionally μ-a.e. on X.*

Theorem 3 (a general form of the Orlicz theorem). *Assume that*

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 \, (\log_2^2 n) \, \omega_n < \infty \quad \textit{and} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \, (\log_2 n) \, \omega_n} < \infty$$

for some (nonstrictly) increasing sequence of numbers $\omega_n > 0$. Then series (1) *converges unconditionally μ-a.e. on X.*

[1] V.A. Mikhailets, A.A. Murach, *General forms of the Menshov–Rademacher, Orlicz, and Tandori theorems on orthogonal series*, Methods Funct. Anal. Topology **17** (2011), 330–340.

[2] V.A. Mikhailets, A.A. Murach, *On the unconditional almost-everywhere convergence of general orthogonal series*, Ukr. Math. J. **63** (2012), 1543–1550.

Institute of Mathematics, NAS of Ukraine
e-mail: mikhailets@imath.kiev.ua

Institute of Mathematics, NAS of Ukraine
e-mail: murach@imath.kiev.ua

A "surprise"in optimization of quadrature formulas on classes of periodic functions

K.I. Oskolkov

Results and conjectures associated with the following "optimal extrapolation"problem

$$\sup_{f\in\mathcal{B}(\pi_N)} |f(0)-\sum_1^n w_m f(z_m)| \longrightarrow \inf \text{ in the weights}\{w_m\} \text{ and the nodes, } |z_m|\geq 1.$$

will be discussed. Here π_N denotes the subspace of polynomials of degree N in complex variable z, $f(z)=\sum_1^N c_\nu z^\nu$, $\mathcal{B}$ - the unit ball un a functional norm, say $\mathcal{L}^2$ or $\mathcal{C}$ of the boundary values $f|_{z=e^{2\pi i\vartheta}}$. There are no restrictions imposed on complex-valued weights w, nor the nodes, except that the nodes are banned from entering the unit disc. If the nodes are all on the unit circle, then this problem can be interpreted as optimization of quadrature formulas with n nodes for the Cauchy integral formula

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz.$$

The 'surprise"consists un the *observation* (partly in the form of theorems) that in the process inf of optimization, the nodes $\{z_m\}$ seem to converge, or collapse, to a single point on the unit circle, with unbounded weights $\{w_m\}$. It is likely that the optimal choice of quadrature formulas would be the limiting *differential operator*, of order $n-1$, whose action should be measured at this single point on the boundary.

As for the quantitative side, the values $q_n(\mathcal{B}^N)$ of the error inf sup of such "limit-optimal quadrature formula"satisfies the two-sided estimates of the type

$$\langle\langle\quad e^{-\frac{n^2}{N}} << q_n(\mathcal{B}^N) << e^{-\frac{n}{\sqrt{N}}}\quad\rangle\rangle$$

In particular, if $n\geq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ where ε is a fixed positive number, then $q_n(\mathcal{B}^N)\to 0$ as $n,N\to\infty$, and on the other hand $q_n(\mathcal{B}^N)\nrightarrow 0$ if $n\leq N^{\frac{1}{2}}$.

Peculiar relations of such type of optimization problems with *free ridge approximation* will be also discussed.

The best approximation of classes of differentiable functions by splines

N. V. Parfinovych

Let L_p, $1 \le p \le \infty$, be the spaces of 2π-periodic functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with norms $\| \cdot \|_{L_p} = \| \cdot \|_p$, $M \subset L_p$ be a class.

The quantity

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_p$$

we will call the best approximation of class M by set H in L_p.

Let C^r $(r = 0, 1, ..., C^0 := C)$ be the spaces of r times continuously differentiable (continuous for $r = 0$) 2π-periodic functions, $\omega(t)$ be an arbitrary fixed modulus of continuity. By $W^r H^\omega$ denote the class of functions $f \in C^r$, such that $\|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t + \delta)\|_C \le \omega(\delta)$, $\delta \ge 0$, and function

$$f_{n,0}(\omega; t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega(\pi/n - 2t), & 0 \le t \le \pi/2n, \\ \frac{1}{2}\omega(2t - \pi/n), & \pi/2n < t \le \pi/n; \end{cases}$$

$f_{n,0}(t) = -f_{n,0}(t - \pi/n)$, $\pi/n \le t \le 2\pi/n$.

By $f_{n,r}(\omega; t)$ $(r = 1, 2, ...)$ denote r-th $2\pi/n$-periodic integral of $f_{n,0}(\omega; t)$ with zero-mean value on the period.

By $S_{2n,m}$, $n, m \in N$, denote the space of 2π-periodic polynomial splines of order m defect 1 with knots at the points $\frac{j\pi}{n}$, $j \in Z$.

In 1970-th N.P. Korneichuk proved, that for all $r = 0, 1, ...$, $n = 1, 2, ...$, $m \ge r$:

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m})_1 = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1.$$

We will consider the issues of further development of this topic and present some new results.

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: nat-vic-par@i.ua

The pointwise one-sided approximation to the class $\breve{W}^r_\infty,\ 0 < r < 1$

A.M. Pasko

Consider the number $r > 0, r \notin \mathbb{N}$. Let W^r_∞ be the class of functions f_r defined by the equality

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f(t) dt + P(x), \quad x \in [-1, 1],$$

where $\Gamma(r)$ is the Euler gamma function, the function f is measurable and almost everywhere $|f(t)| \leq 1$, P is an algebraic polynomial of degree not greater than $[r-1]$ ($[a]$ is the greatest integer less than or equal to a). Let $\breve{W}^r_\infty$ be the the class of all functions defined by Cauchy principal value integral

$$S(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-\ t^2} dt,\ f \in W^r_\infty,$$

where $x \in (-1; 1)$.

Our main result is the following theorem.

Theorem 1. *For every function $f \in \breve{W}^r_\infty$, $0 < r < 1$, there is a sequence of algebraic polynomials $P^+_{n,r}$ of degree not greater than n such that* $\forall x \in (-1; 1)$

$$0 \leq P^+_{n,r}(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r} (\sqrt{1-x^2})^{r+1} + \frac{C_r \ln n}{n^{2r}} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right).$$

Note that the analogous estimation of the pointwise one-sided approximation to the class $\breve{W}^r_\infty,\ r \geq 1$, has been established by A.M.Pasko, O.O. Kolesnik earlier.

Dniprovski National
University
e-mail: pasko08@meta.ua

Recovery of Non-Periodic Functions from Random Samples in the Uniform Norm

K.V. Pozharska, T. Ullrich

Let $H(K)$ be a reproducing kernel Hilbert space (RKHS) of multivariate complex-valued functions $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}$ with the kernel $K\colon D \times D \to \mathbb{C}$. Consider an identical operator $I_d\colon H(K) \to F$, $F \supseteq H(K)$.

Let further $f(\mathbf{x}^1), \ldots, f(\mathbf{x}^n)$ be the given data, where $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n\}$, $\mathbf{x}^i \subset D$, $i = 1, \ldots, n$, are the nodes. The corresponding quantity $g_n(I_d)$ that measures the recovery error using "standard" information about functions is called sampling numbers.

So far sparse grid techniques have been used in studying sampling numbers, the history overview can be found in the recent monograph [1, Ch. 5]. Our goal is to take random samples — function values at independently drawn nodes according to a probability measure ϱ_D. The main feature of this approach is that the nodes are drawn once for the whole class in contrast to the Monte-Carlo method.

We solve the problem of the optimal order of convergence among algorithms that use standard information in the uniform norm under certain additional assumptions on eigenfunctions and eigenvalues of the corresponding integral operator and show that in the considered case standard information is as powerful as linear information. For the results on the optimal order of convergence in L_2-norm see [2-5].

We consider also examples of particular non-periodic RKHS where the kernel is built on the system of Chebyshev polynomials. Further we write down the worst case recovery guarantees with high probability (asymptotic and preasymptotic) for functions from these RKHS for the least squares approximation using random samples drawn according to the Chebyshev measure.

1. D. Dung, V. Temlyakov and T. Ullrich, Hyperbolic cross approximation, Birkhäuser, 2018.

2. F. Y. Kuo, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, On the power of standard information for multivariate approximation in the worst case setting, *J. Approx. Theory* **158** (2009), 97-125.

3. D. Krieg, M. Ullrich, Function values are enough for L_2-approximation, arXiv: 1905.02516v3, 2019.

4. L. Kämmerer, T. Ullrich, T. Volkmer, Worst case recovery guarantees for least squares approximation using random samples, arXiv: 1911.10111, 2019.

5. M. Moeller, T. Ullrich, L_2-norm sampling discretization and recovery of functions from RKHS with finite trace, arXiv: 2009.11940, 2020.

Institute of Mathematics
of NAS of Ukraine
01024 Kyiv, Ukraine
e-mail: kate.shvai@gmail.com

Technical University of Chemnitz,
09107 Chemnitz, Germany
e-mail:
tino.ullrich@mathematik.tu-chemnitz.de

On uniform convergence of Fourier series

E.I.Radzievskaya

In terms of the best approximations of a function in the space L_p was found the condition of existence (ψ, β)-derivatives of the function belonging to L_q when $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Also, a condition was found when this derivative is continuous and its Fourier series uniformly converges to it.

Let L_p be a space of measurable 2π-periodic functions $f(x)$, and $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$, $1 < p < \infty$; $E_n(f)_p$ be the best approximation of the function $f(x)$ in the metric of L_p by trigonometric polynomials of the order of at most $n-1$ and $\omega_k(f, \delta)_p$ be the modulus of smoothness of the k-th order (k is a natural number) in the space $L_p(0, 2\pi)$. According [1] we denote through $f_\beta^\psi(x)$ a (ψ, β)-derivative of a function f.

The following statement has been proved.

Theorem 1. Let $\psi(t)$ be such positive nonincreasing function which is defined for all $t \geq 1$ such that $\psi(2t) \geq c\psi(t)$ (c is some positive constant), and let the best approximations of the function $f \in L_p$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ satisfy the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} < \infty.$$

Then the function f has the (ψ, β)-derivative which belongs to L_q, and

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \omega_p(f_\beta^\psi, \frac{1}{k}) < \infty.$$

Corollary. Let the best approximations of the function $f \in L_p$ satisfy the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-1} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} < \infty.$$

Then the function f has a continuous (ψ, β)-derivative and its Fourier series converges uniformly to it.

[1]Stepanets A. I. *Methods of Approximation Theory. I* [in Russian], Inst. Math. of the NASU, Kiev (2002).

National University of Food Technology
Kyiv
e-mail: radzlena58@gmail.com

Asymptotic estimates for the best uniform approximations of classes of convolution of periodic functions of high smoothness

A.S. Serdyuk, I.V. Sokolenko

Denote by $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, the set of all 2π-periodic functions f, representable as convolution

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{1}$$

$$B^0_p = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \le 1, \ \varphi \perp 1\},$$

with a fixed generated kernel $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, the Fourier series of which has the form:

$$S[\Psi_{\bar\beta}](t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \ \beta_k \in \mathbb{R}, \ \psi(k) \ge 0.$$

A function f in the representation (1) is called $(\psi,\bar\beta)$-integral of the function φ and is denoted by $\mathcal{J}^{\psi}_{\bar\beta}\varphi$ $(f = \mathcal{J}^{\psi}_{\bar\beta}\varphi)$. If $\psi(k) \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$, then the function φ in the representation (1) is called $(\psi,\bar\beta)$-derivative of the function f is denoted by $f^{\psi}_{\bar\beta}$ $(\varphi = f^{\psi}_{\bar\beta})$. The concepts of $(\psi,\bar\beta)$-integral and $(\psi,\bar\beta)$-derivative was introduced by A.I. Stepanets.

We find two-sides estimates for the best uniform approximations of classes $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, of convolutions of 2π-periodic functions from unit ball of the space $L_p, 1 \le p < \infty$, with fixed kernels, modules of Fourier coefficients of which satisfy the condition $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) < \psi(n)$.

In the case of $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) = o(1)\psi(n)$ the obtained estimates become the asymptotic equalities.

This work was partially supported by the Grant H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology).

Institute of Mathematics
of NAS of Ukraine
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

Institute of Mathematics
of NAS of Ukraine
e-mail: sokol@imath.kiev.ua

Uniform approximations by Fourier sums on classes $C^{\psi}_{\beta,1}$

A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk

Let $C^{\psi}_{\beta,1}$ be the set of all functions f, which are represented for all x as convolutions of the form

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\Psi_\beta(x-t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \varphi\in B_1^0,$$

where

$$B_1^0:=\left\{\varphi:\ ||\varphi||_{L_1}\leq 1,\ \varphi\perp 1\right\}.$$

and Ψ_β is a fixed kernel of the form

$$\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big),\ \psi(k)\geq 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

For the classes $C^{\psi}_{\beta,1}$ we consider the quantities

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,1}}\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C,$$

where $S_{n-1}(f;\cdot)$ are the partial Fourier sums of order $n-1$ for a function f.

The following statement holds.

Theorem 1. *Let $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\psi(k)<\infty$, $\psi(k)\geq 0$, $k=1,2,...$ and $\beta\in\mathbb{R}$. Then as $n\to\infty$ the following asymptotic equality holds*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{1}$$

where $\mathcal{O}$ is a quantity uniformly bounded in all parameters.

Formula (1) becomes an asymptotic equality for the sequence $\psi(k)$, which decreases to zero faster than arbitrary power function.

The first author is partially supported by the Grant H2020-MSCA-RISE- 2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology; the second author is supported by the Alexander von Humboldt Foundation.

Institute of Mathematics
of NASU
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

University of Lubeck,
Germany
e-mail: stepaniuk.tet@gmail.com

Reverse Hölder inequality

R. Shanin

We got a new estimation of the equimeasurable rearrangement of functions which satisfy the reverse Hölder inequality.

Let $\alpha \neq 0$ and $|R|$ be the Lebesgue measure of the segment $R \subseteq \mathbb{R}^d$. For a non-negative function f, we denote by $M_\alpha(f, R)$,

$$M_\alpha(f, R) = \left(\frac{1}{|R|} \int_R f^\alpha(x)\, dx \right)^{1/\alpha},$$

the mean of order α. For α, β, $\eta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta\eta \neq 0$ and the fixed segment R_0, the class of functions satisfying the reverse Hölder inequality on R_0 is defined as

$$RH'_{\alpha,\beta,\eta}(R_0) = \left\{ f \in L^\alpha(R_0) \cap L^\beta(R_0) \colon \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\eta} < \infty \right\},$$

where

$$\langle f \rangle_{\alpha,\beta,\eta} = \sup_{R \subseteq R_0} \left(M_\beta^\eta(f, R) - M_\alpha^\eta(f, R) \right)$$

and the supremum is taken over all segments $R \subseteq R_0$.

We obtained a sharp estimation of the growth rate of the equimeasurable rearrangement f^* of a function $f \in RH'_{\alpha,\beta,\eta}(R_0)$. The main result is contained in the following theorem.

Theorem. *Let $0 < \alpha < \beta$, $\eta > 0$ and $a > 1$. Then there is a positive real number C such that, for every $f \in RH'_{\alpha,\beta,\eta}(R_0)$, the inequality*

$$M_{\beta/2}^{\eta/2}(f^*)(t) - M_{\beta/2}^{\eta/2}(f^*)(|R_0|) \leq \frac{C}{\ln a} \ln \frac{|R_0| a}{t} \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\eta}^{1/2}$$

holds with $0 < t \leq |R_0|$, where f^* is the non-increasing equimeasurable rearrangement of the function f.

Odessa I. I. Mechnikov National University
e-mail: ruslanshanin@gmail.com

Interpolation Formulas with Nodes of the Third Multiplicity Containing Variational Derivatives

L.A. Yanovich, M.V. Ignatenko

Suppose that a functional $F : X \to \mathbb{R}$ is defined on the set of functions $X = C\,[a,b]$ or $X = L_2[a,b]$. Let the values $F(x_\nu)$, the values of the first $\frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}$, and also the values of the second variational derivatives $\frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)}$ at the nodes $\{x_\nu(t)\}_{\nu=0}^{n} \in X$ ($t \in [a,b]$) be known. It is required to construct an interpolation polynomial $H_{3n+2}(F;\ x) : X \to \mathbb{R}$ satisfying the conditions

$$H_{3n+2}(F;\ x_\nu) = F(x_\nu), \tag{1}$$

$$\frac{\delta H_{3n+2}(F;x_\nu)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}, \frac{\delta^2 H_{3n+2}(F;x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)}\,(\nu = 0,\ 1,\ ...,\ n)\,. \tag{2}$$

By $H_{0k}(x)$, $H_{1k}(x)$ and $H_{2k}(x)$ ($k = 0,\ 1,\ ...,\ n$) we denote the fundamental polynomials with respect to an arbitrary Chebyshev system of functions $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{3n+2}$ in the Hermite interpolation formula with nodes $x_\nu \in X$ ($\nu = 0,\ 1,\ ...,\ n$) of the third multiplicity. These polynomials satisfy the conditions $H_{0k}(x_\nu) = H'_{1k}(x_\nu) = H''_{2k}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$, $H'_{0k}(x_\nu) = H''_{0k}(x_\nu) = 0$, $H_{1k}(x_\nu) = H''_{1k}(x_\nu) = 0$, $H_{2k}(x_\nu) = H'_{2k}(x_\nu) = 0$ $(k,\ \nu = 0,\ 1,\ ...,\ n)$, where $\delta_{k\nu}$ is the Kronecker symbol, and the corresponding Hermite formula for scalar functions with interpolation conditions $H_{3n+2}(F;\ x_k) = F(x_k), H'_{3n+2}(F;\ x_k) = F'(x_k), H''_{3n+2}(F;\ x_k) = = F''(x_k)\,(k = 0,\ 1,\ ...,\ n)$ has the form

$$H_{3n+2}(F;\ x) = \sum_{k=0}^{n} \{F(x_k)\,H_{0k}(x) + F'(x_k)\,H_{1k}(x) + F''(x_k)\,H_{2k}(x)\}\,. \tag{3}$$

We obtain an analog of the formula (3) in the class of functionals $F(x)$, for which the equalities $\frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(s)\delta x(t)}$ $(\nu = 0,\ 1,\ ...,\ n)$ are valid.

Theorem 1. *The functional* $H_{3n+2}(F;\ x) =$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} F(x_k)\int_a^b H_{0k}\,(x(t))\,dt + \sum_{k=0}^{n}\int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H_{1k}\,(x(t))\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\int_a^b \frac{\delta^2 F(x_k)}{\delta x(t)\delta x(s)} H'_{2k}\,(x(t))\,H_{1k}\,(x(s))\,dtds$$

is the Hermite interpolation polynomial for $F(x)$ with respect to nodes of the third multiplicity $\{x_k(t)\}_{k=0}^{n}$ on X satisfying the requirements (1), (2).

Institute of Mathematics
of the NAS of Belarus
e-mail: yanovich@im.bas-net.by

Belarusian State
University
e-mail: ignatenkomv@bsu.by

A New Upper Bound for Sampling Numbers

T. Ullrich

We provide a new upper bound for sampling numbers $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associated to the compact embedding of a separable reproducing kernel Hilbert space into the space of square integrable functions. There are universal constants $C, c > 0$ (which are specified in the paper) such that

$$g_n^2 \leq \frac{C\log(n)}{n} \sum_{k \geq \lfloor cn \rfloor} \sigma_k^2, \quad n \geq 2\,,$$

where $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is the sequence of singular numbers (approximation numbers) of the Hilbert-Schmidt embedding $\mathrm{Id} : H(K) \to L_2(D, \varrho_D)$. The algorithm which realizes the bound is a least squares algorithm based on a specific set of sampling nodes. These are constructed out of a random draw in combination with a down-sampling procedure coming from the celebrated proof of Weaver's conjecture, which was shown to be equivalent to the Kadison-Singer problem. Our result is non-constructive since we only show the existence of a linear sampling operator realizing the above bound. The general result can for instance be applied to the well-known situation of $H^s_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)$ in $L_2(\mathbb{T}^d)$ with $s > 1/2$. We obtain the asymptotic bound

$$g_n \leq C_{s,d} n^{-s} \log(n)^{(d-1)s+1/2}\,,$$

which improves on very recent results by shortening the gap between upper and lower bound to $\sqrt{\log(n)}$. This joint work with N. Nagel and M. Schäfer (TU Chemnitz).

Technical University of Chemnitz,
09107 Chemnitz, Germany
tino.ullrich@mathematik.tu-chemnitz.de

Наилучшее полиномиальное приближение в пространстве L_2

М.А. Абдулхаминов

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом модуля по Лебегу 2π-периодических функций с конечной нормой $\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left((1/\pi)\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

Через $\triangle_h^m(f, x)$ обозначим конечную разность k-го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h, то есть $\triangle_h^m(f, x) := \sum\limits_{k=0}^{m}\big(-1\big)^{m-k}\binom{m}{k} f\big(x + kh\big)$. Следуя работе [1, 2], под усредненной характеристикой гладкости функций $f \in L_2$ будем понимать величину $\Lambda_m(f, t)_2 := \left((1/t)\int_0^t \left\|\triangle_h^m(f)\right\|^2 dh\right)^{1/2}$, $t > 0$. Символом $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Пусть $\mathcal{T}_{2n-1}$ - подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье $f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$ величина её наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна $E_{n-1}(f)_2 := \inf\big\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\big\} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)\right\}^{1/2}$. Положим $J_{k,m}(u) := \left((1/u)\int_0^u \big(1 - \cos kh\big)^m dh\right)^{1/2}$, где $k, m \in \mathbb{N}$ и $u > 0$.

Теорема. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}, 0 < h \le 2\pi$ и $0 < p \le \infty$, $\varphi(t)$ — весовая на $[0, h]$ функция. Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \Big(2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2\Big)\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)dt\right)^{-1/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\ \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}.$$

Следствие. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}_+, r \ge s\ 0 < h \le 2\pi/n$ и $0 < p \le \infty$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \Big(2^{m/2}\, n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2\Big)\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)dt\right)^{-1/p} =$$

$$= \left\{ \int_0^h J_{1,m}^p(nt)\ \varphi(t)dt \right\}^{-1/p}.$$

В случае $0 < p \leq 2$ теорема доказана в [2].

Литература

1. *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ — Матем. сборник. 1994, т.185, №8, С.81-102.

2. *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций — Матем. заметки. 2016, т.99, вып.2, с.215-238.

Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе

Наилучшее приближение «углом» в пространстве $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита

М.О. Акобиршоев, В.Д. Сайнаков

Пусть $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$, $\mu(x,y) = exp\{-(x^2+y^2)\}$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — пространство функций f, для которых $\mu^{1/2} f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. В метрике пространства $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ получены точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие величины $\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ — наилучшее среднеквадратическое приближение «углами», составленные из полиномов Чебышева-Эрмита с обобщённым модулем непрерывности $\Omega_{k,l}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu}$ в L_p-норме, где $\mathcal{D} := \Delta - 2x\dfrac{\partial}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\quad\Delta$ – оператор Лапласа. Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $m,n,k,l \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1 \leq p \leq \infty$, $q(t,\tau)$ *— весовая функция на* $Q := [0,h]\times[0,\eta]$ $(0 \leq h,\eta < 1)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}} \frac{2^{r-s}(n+m)^{r-s}\mathscr{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\iint_{(Q)} \Omega^p_{k,l}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu}\, q(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\iint_{(Q)} \left(1-(1-t^2)^{n/2}\right)^{kp}\left(1-(1-\tau^2)^{m/2}\right)^{lp} q(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/p}.$$

Литература

1. *Вакарчук С.Б., Швачко А.В.* О наилучшем приближении «углом» в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита. — Зб. праци Инсту математики НАН Украины. 2014, т.11, №3, с.35-46.

2. *Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О.* Среднеквадратическое приближение «углом» на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита. — Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2019, №2(20), с.96-104.

Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе

Задача про відновлення значень нормального оператора

В.Ф. Бабенко і Р.О. Біліченко

Багато задач обчислювальної математики, теорії функцій є некоректними задачами відновлення значень деякого оператора A на елементах класу Q у припущенні, що елементи даного класу задані із відомою похибкою.

Для числа $\delta \geq 0$ і оператора T з множини $\mathcal{L}(N)$ лінійних обмежених операторів, норма яких не перевищує N, покладемо

$$U_\delta(T) = U_\delta(T; A, Q) = \sup\{\|Ax - T\eta\|_Y : x \in Q, \eta \in X, \|x - \eta\|_X \leq \delta\}.$$

Величину

$$\varepsilon_\delta(\mathcal{L}) = \varepsilon_\delta(\mathcal{L}; A, Q) = \inf\{U_\delta(T) : T \in \mathcal{L}\}$$

називають величиною найкращого відновлення оператора A за допомогою множини відображень $\mathcal{L}$ на елементах класу Q, заданих із похибкою δ.

Розглянемо задачу відновлення значень нормального оператора A^k на елементах класу $Q = WD(A^r) = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \leq 1\}$ $(k, r \in \mathbb{N},\ k < r)$, якщо елементи класу задані з відомою похибкою δ. Згідно із спектральною теорією нормальному оператору A відповідає розклад одиниці E_z (детальніше див. [1]).

Теорема. Нехай A – нормальний, у загальному випадку необмежений оператор, що діє в гільбертовому просторі H, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, причому для оператора A виконується умова

$$E_{B_t \setminus B_s} D\left(A^{2r}\right) \neq \{\theta\}, \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s < t,$$

де $B_j = \{z : |z| \leq j, j \in \mathbb{R}\}$ – круг комплексної площини. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ справедлива рівність

$$\varepsilon_\delta(\mathcal{L}; A^k, WD(A^r)) = \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

1. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г. Ф. Ус, З.Г. Шефтель. - К.: Вища школа, 1990.

Дніпровський національний університет
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Дніпровський національний університет
e-mail: roman.bilichenko@ukr.net

Нерівність Лебега-Ландау на класах диференційовних функцій комплексної змінної

В.В. Бовсуновська, М.В. Гаєвський, П.В. Задерей

Нехай $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$, $L_1(\mathbb{T})_+$; $L_\infty(\mathbb{T})_+$; $C(\mathbb{T})_+$ — простори функцій, відповідно, сумовних, суттєво обмежених та неперервних на $\mathbb{T}$ функцій з рядами Фур'є степеневого типу, тобто $\widehat{f}(k) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Нехай також задана послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, яка задовольняє умови Сідона–Теляковського, тобто :

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$;

2) $\exists\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta A_k| < \infty$, $|\Delta\psi(k)| \leqslant A_k$, $\Delta A_k = A_k - A_{k+1}$.

Через $f^\psi(e^{it})$ будемо позначати ψ-похідну у розумінні О.І. Степанця функції $f \in L_1(\mathbb{T})_+$, а через $L_1^\psi(\mathbb{T})_+$ — множину функцій $f \in L_1(\mathbb{T})_+$, у яких існують ψ-похідні, крім того $C^\psi(\mathbb{T})_+ = C(\mathbb{T})_+ \cap L_1^\psi(\mathbb{T})_+$.

Теорема *Нехай послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}$ задовольняє умови Сідона–Теляковського і $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty$. Тоді $\forall f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$||f(e^{it}) - S_n(f; e^{it})||_C \leqslant \Big(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(n+k)|}{k} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\psi(k)|}{k} +$$

$$+ O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n+1)|\Delta A_k|\Big) E_n(f^\psi)_C,$$

де $O(1)$ — величина рівномірно обмежена по n і f, а $E_n(f^\psi)_C = \inf\limits_{t_n\in T_n} ||f(e^{i\tau}) - t_n(e^{i\tau})||_C$, T_n — множина тригонометричних поліномів $t_n(e^{i\tau}) = \sum\limits_{k=0}^{n}\gamma_k e^{ik\tau}$, $S_n(f; e^{it}) = \sum\limits_{k=0}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikt}$.

КПІ ім. Ігоря Сікорського
e-mail: bovsunovska@matan.kpi.ua

Центральноукраїнський
ДПУ ім. В. Винниченка

КПІ ім. Ігоря Сікорського

Оцінки поперечників класів функцій двох змінних у ваговому просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, $\gamma = \exp(-x^2 - y^2)$

С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук

Нехай $L_2(\mathbb{R}^2)$ є простір вимірних на площині $\mathbb{R}^2$ функцій, які сумовні на $\mathbb{R}^2$ з квадратом. Через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ позначимо простір функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ для яких $\gamma^{1/2} f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Норма в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ визначається за формулою

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)} = \left\{ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \gamma(x,y) f^2(x,y)\,dxdy \right\}^{1/2}.$$

Символом $\Omega_{m,\gamma}(f,t)$, $t \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, позначимо узагальнений модуль неперервності m-го порядку функції $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Функцію $\Psi(t)$, $t \in [0,1]$, будемо називати мажорантою, якщо вона є неперервною, монотонно зростаючою і такою, що $\Psi(0) = 0$. Позначимо через $W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$, $m \in \mathbb{N}$, клас, що складається з функцій $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, для яких при будь-якому $t \in (0,1)$ виконується нерівність $\Omega_{m,\gamma}(f,t) \leqslant \Psi(t)$. Для довільного класу $\mathfrak{N} \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ через $E_{n-1}(\mathfrak{N})_{2,\gamma}$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо величину найкращої апроксимації $\mathfrak{N}$ підпростором алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}_{n-1} := \{p_{n-1}(x,y) = \sum\limits_{0 \le i+j \le n-1} a_{ij} x^i y^j, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ в метриці простору $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Наведемо один з отриманих результатів.

Теорема. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$; $k = \overline{0,n}$, і мажоранта Ψ задовольняє умову

$$\inf_{0<t<1} \frac{(1 + (1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}} = 2^m \varlimsup_{t \to 0+} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}.$$

Тоді мають місце наступні рівності:

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi))_{2,\gamma}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^m \varlimsup_{t \to 0+} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}},$$

де $p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ є будь-який із поперечників — берштейнівський, колмогоровський, гельфандовський, лінійний, проекційний, ортопоперечник.

[1] Vakarchuk S., Vakarchuk M. On the estimates of the values of various widths of classes of functions of two variables in the weight space $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, $\gamma = \exp(-x^2 - y^2)$. Journal of Mathematical Sciences. Vol. 248, issue 2, July 2020. P. 217–232.

Університет імені Альфреда Нобеля
e-mail: sbvakarchuk@gmail.com

Дніпровський національний університет
e-mail: mihailvakarchuk@gmail.com

Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних

Г.М. Власик, І.В. Замрій, В.В. Шкапа

Досліджується апроксимативна характеристика $d_M^{\perp}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})$ для класів періодичних функцій багатьох змінних, які для функції однієї змінної були запроваджені О.І. Степанцем (див., наприк., [1, Т.1, с.132]). Зазначимо, що класи $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ є узагальненням відомих класів Вейля-Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ (див., наприк., [1, Т.1, с.131]) та співпадають з ними при $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r_j}, r_j > 0, k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, j = \overline{1,d}$.

Нехай $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, – простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі стандартною нормою. Розглянемо для $f \in L_q$ апроксимативні характеристики:

$$d_M^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i \right\|_q,$$

$$d_M^{B}(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \left\| f - Gf \right\|_q,$$

де $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована система функцій $u_i(\boldsymbol{x}) \in L_\infty(\pi_d)$, $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}) \overline{u_i(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}$; $\mathcal{L}_M(B)_q$ – множина лінійних операторів G (область визначення $\mathcal{D}(G)$ містить всі тригонометричні поліноми, область значення міститься в підпросторі $L_q(\pi_d)$ розмірності M); число $B \ge 1$ і для всіх $\boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_d)$ виконується нерівність $\|Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2 \le B$.

Через D позначимо множину додатних і незростаючих послідовностей $\psi_j(l)$, $l \in \mathbb{N}$, таких, що $\frac{\psi_j(l)}{\psi_j(2l)} \le C$, де C – деяка абсолютна стала.

Теорема. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, послідовності* $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ *не зростають. Тоді для натуральних чисел* M *і* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \ll d_M^{B}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_q) \le$$

$$\le d_M^{\perp}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_q) \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)},$$

де $\Phi(n) = \min_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j})$, $\Psi(n) = \max_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j})$.

1. Степанець А.И. Методы теории приближений: В 2 т. – К., Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.1. – 426 с.

Державний університет телекомунікацій
e-mail: annawlasik@gmail.com

Державний університет телекомунікацій
e-mail: irinafraktal@gmail.com

Державний університет телекомунікацій
e-mail: vshkapa@ukr.net

Наближення класів узагальнено диференційовних функцій сумами Фур'є

М.В. Гаєвський, П.В. Задерей, Н.М. Задерей, Г.Д. Нефьодова

Нехай $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$; C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(z)$, заданих на $\mathbb{T}$, з нормою $\|f\|_C = \max\limits_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|$; $L_p(\mathbb{T})_+, 1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних функцій $f(e^{it})$ з рядами Фур'є виду

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

і скінченною нормою $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})_+}$:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{при} \ \ 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(e^{it})| \ \ \text{при} \ \ p = \infty, \end{cases}$$

$U_p^0 := \{g \in L_p(\mathbb{T})_+ : \|g\|_p \le 1, g \perp 1\}, 1 \le p \le \infty.$

Якщо $\psi = \{\psi(k)\}, k \in \mathbb{N}$ — послідовність комплексних чисел таких, що $\psi(k) \ne 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$, то через $f^\psi(e^{it})$ будемо позначати ψ-похідну (у розумінні О.І. Степанця) функції $f \in L_1(\mathbb{T})_+$. Множину функцій $f \in L_1(\mathbb{T})_+$, у яких існують ψ-похідні, позначимо через $L_1^\psi(\mathbb{T})_+$. Клас функцій $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ таких, що $f^\psi \in U_p^0$ будемо позначати $L_{1,p}^\psi(\mathbb{T})_+$. Нехай $C_p^\psi(\mathbb{T})_+ = C \cap L_{1,p}^\psi(\mathbb{T})_+$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо* $\forall k \in \mathbb{N} : |\psi(k)| \ge |\psi(k+1)|$, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$ *та* $B_q = \left(\sum_{k=1}^\infty \psi^q(k) k^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *то* $\forall n \in \mathbb{N}$ *мають місце співвідношення*

$$M^{(1)}(\psi, p) B_q(\psi) \le \sup_{f \in C_p^\psi(\mathbb{T})_+} \|f(e^{it}) - S_n(f, e^{it})\|_C \le M^{(2)}(\psi, p) B_q(\psi)$$

де $M^\nu(\psi, p), \nu = 1, 2,$ — *величини, які залежать, можливо, лише від* ψ *і* p.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
e-mail: mgaevskij@gmail.com

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
e-mail: zadereypv@ukr.net

Мультиплікатори в просторах Харді

М.В. Гаєвський, П.В. Задерей, Н.М. Задерей, Г.Д. Нефьодова

Нехай m — деяке натуральне число, $\mathbb{Z}_+^m$ — множина впорядкованих наборів цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{C}^m$ — множина впорядкованих наборів комплексних чисел $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. Через $D^m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |z_j| < 1,\, 1 \leq j \leq m\}$ позначимо одиничний полікруг з кістяком $T^m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |z_j| = 1,\, 1 \leq j \leq m\}$. Через $H_1(D^m)$ позначимо множину аналітичних в полікрузі D^m функцій f, для яких виконується умова

$$\|f\|_{H_1(D^m)} = \sup_{0<r_j<1, 1\leq j\leq m} \int_0^{2\pi} dt_1 \ldots \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{it_1}, \ldots, r_m e^{it_m})| dt_m < \infty.$$

В кратному випадку для аналітичних функцій зручно розглядати ряди Тейлора по трикутним областям $f(z) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^m} \mathbf{c_k} z^{\mathbf{k}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(z)$, де

$F_\nu(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_m=\nu} \mathbf{c_k} z^{\mathbf{k}}$.

За допомогою послідовності комплексних чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$ кожній $f \in H_1(D^m)$ з рядом Тейлора $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(z)$ поставимо у відповідність функцію $\Lambda f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu F_\nu(z)$ та означитимо наступним чином мультиплікатор. Послідовність комплексних чисел Λ називається мультиплікатором, що діє з $H_1(D^m)$ в $H_1(D^m)$, якщо $\|\Lambda f\|_{H_1(D^m)} \leq M\|f\|_{H_1(D^m)}, M > 0$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Для того щоб послідовність комплексних чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$ була мультиплікатором з простору $H_1(D^m)$ в $H_1(D^m)$, необхідно і достатньо, щоб існувала така послідовність комплексних чисел μ_k, що*

$$\sup_n \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{ikt} \Big| dt < \infty.$$

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
e-mail: mgaevskij@gmail.com

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
e-mail: zadereypv@ukr.net

Достатні умови збіжності рядів Фабера в середині області

М.В. Гаєвський, П.В. Задерей, Н.М. Задерей, І.Г. Ключник

Нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, межею якої є замкнена жорданова крива Γ. Відображення $w = \Phi(z)$ конформно та однолисно відображає зовнішність області $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ на область D_∞ — зовнішність одиничного круга $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ при умовах $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(z) = \gamma > 0$. Через $z = \Psi(w)$ позначимо обернене до $w = \Phi(z)$ відображення.

За допомогою функції $\Psi(w)$ для області Ω можна означити систему поліномів Фабера $F_n(z)$, $z \in \Omega$ як коефіцієнти Лорана в розкладі функції $K(z,w)$ в околі точки $w = \infty$ $K(z,w) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$, $z \in \Omega$.

Нехай $L_\infty(\Gamma)$ — простір істотно обмежених на Γ функцій з нормою $\|f\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname{esssup}_{z\in\Gamma}|f(z)|$, де $|\Gamma|$ – довжина кривої Γ.

Розглянемо множину аналітичних функцій в області Ω, котрі можна представити інтегралом типу Коші із щільністю $f \in L_\infty(\Gamma)$ $Kf(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

Нехай $Kf(z) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ — ряд Фабера функції $Kf(z)$, де коефіцієнти Фабера визначають по формулі $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)d\zeta}{\Phi^{n+1}(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{f(\Psi(t))dt}{t^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \ldots$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай Ω — деяка обмежена однозв'язна область, межею якої є спрямлювана жорданова крива Γ та $f \in L_\infty(\Gamma)$. Якщо для $f \in L_\infty(\Gamma)$ послідовність її коефіцієнтів Фур'є $a_k, k = 0, 1, \ldots$ задовольняє умови*

1. $\lim\limits_{|k|\to\infty} a_k = 0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{|k|=n}^{\infty} |\triangle a_k| = 0$, *де* $\triangle a_k = a_k - a_{k+1}$,
3. $K(z,w) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} \in H_1(D_\infty)$ *для кожного* $z \in \Omega$,

то інтеграл типу Коші Kf можна розкласти в ряд Фабера, що рівномірно збіжний в середині області Ω.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка
e-mail: mgaevskij@gmail.com

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
e-mail: zadereypv@ukr.net

Лінійні та колмогоровські поперечники функціональних класів типу Нікольського–Бєсова

М.В. Гембарський, С.Б. Гембарська

Йдеться про точні за порядком оцінки колмогоровських і лінійних поперечників класів $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій однієї змінної у просторах Лебега $L_q = L_q([0,2\pi]),\ 1 \le q \le \infty$, зі стандартною нормою $\|\cdot\|_{L_q}$.

Класи $B^{\omega}_{p,\theta}$ визначаються на основі класичної гладкісної характеристики їх елементів — функції ω типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє відомі умови (S^{α}) і (S_l) (тоді пишемо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$), а також числових параметрів p і θ. Отже, якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ і $1 \le p, \theta \le \infty$, то покладаємо

$$B^{\omega}_{p,\theta} := \{f \in L^0_p :\ \|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}},\ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)}{\omega(t)},$$

Тут $L^0_p := \{f \in L_p([0,2\pi]) :\ \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0\}$, $\omega_l(f,t)_p = \sup_{|h|\le t} \|\triangle^l_h f\|_p$ — модуль гладкості порядку l функції f, а $\triangle^l_h f(x) = \sum\limits_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x+nh)$ — l-та різниця функції $f \in L^0_p$ з кроком h.

Нехай X — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$ і W — центрально–симетрична множина в X. Через $\lambda_M(W,X)$ і $d_M(W,X)$ позначимо відповідно *лінійний і колмогоровський M–поперечники* множини W у просторі X.

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 \le q \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, де $\alpha > 0,\ l \in \mathbb{N}$. Справедливі порядкові рівності*

$$d_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}).$$

Волинський національний університет
імені Лесі Українки
e-mail: hembarskyi@gmail.com

Волинський національний університет
імені Лесі Українки
e-mail: gembarskaya72@gmail.com

Оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією

М.С. Гунько, О.О. Руденко

Будемо вивчати задачу оптимізації наближеного обчислення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією у наступній постановці. Нехай X – лінійний нормований простір над полем комплексних або дійсних чисел, $M_1, ..., M_n \subset X$ центрально-симетричні множини. Припустимо, що на прямому добутку лінійних оболонок $\mathrm{span}(M_j)$ множин M_j задано n-лінійний оператор

$$\Omega : \prod_{j=1}^{n} \mathrm{span}(M_j) \to \mathcal{T},$$

де $\mathcal{T}$ – лінійний нормований простір над полем комплексних або дійсних чисел і для кожного $j = 1, ..., n$ на множині $\mathrm{span}(M_j)$ задано набір $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$ лінійних неперервних функціоналів, $l = 1, ..., m_j$. Вектори $T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j))$, $x_j \in M_j$, будемо називати $(m_1, ..., m_n)$-інформацією про x_1, x_2,..., x_n. Довільну функцію F від $m_1 + ... + m_n$ змінних будемо називати методом відновлення оператора Ω за $(m_1, ..., m_n)$-информацією. Величину

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in M_j, \\ j=1,...,n}} ||\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))||_{\mathcal{T}} \quad (1)$$

назвемо похибкою методу F відновлення оператора Ω на множинах $M_1, ..., M_n$ за інформацією $T_1, ..., T_n$,

Потрібно для заданих Ω, $M_1, ..., M_n$ або $m_1, ..., m_n$ знайти величину (1), оптимальну $(m_1, ..., m_n)$-інформацію і оптимальний метод відновлення F.

Означення. *Діаметром інформації* T_1,...,T_n *для відновлення оператора* Ω *назвем величину* $d(T_1, T_2, ..., T_n, \Omega)$, *що задаеться формулою*

$$d(T_1, T_2, ..., T_n, \Omega) = \sup_{x_j \in M_j} \sup_{\widetilde{x}_j \in M_j | T_j(\widetilde{x}_j) = T_j(x_j)} ||\Omega(x_1, ..., x_n) - \Omega(\widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n})||_{\mathcal{T}}.$$

Наступну лему можна розглядати як узагальнення леми 1 з [1].

Лема. *Нехай задані довільні* Ω, $T_1, ..., T_n$, $M_1, ..., M_n$ *і* $1 \leq j \leq n$. *Тоді*

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; F) \geq \frac{d(T_1, ..., T_n, \Omega)}{2} \geq \sup_{x_k \in M_k} \sup_{\substack{h_j \in M_j \\ T_j(h_j)=0}} ||\Omega(x_1, ..., h_j, ...x_n)||_{\mathcal{T}}.$$

[1] Бабенко В.Ф. О приближенном вычислении скалярных произведений, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 15–21(1988).

Dniprovski National University
e-mail: gunko.marina.2017@gmail.com

Dniprovski National University
e-mail: Rudenko.1m@gmail.com

Оценки скорости сходимости «гиперболических» частных сумм двойного ряда Фурье по общим ортогональным многочленам

О.А. Джурахонов

Пусть $L_2 = L_2((a,b)\times(c,d); p(x)q(y))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f:(a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ с весом $p(x)q(y)$ и нормой

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b\int_c^d p(x)q(y)f^2(x,y)dxdy\right)^{1/2} < \infty,$$

а $\left\{P_k(x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $\left\{Q_l(y)\right\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ — полные ортонормированные системы многочленов с весами $p(x)$ и $q(y)$ соответственно. Для функции $f\in L_2$ запишем разложение в двойной ряд Фурье следующего вида:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(f)P_k(x)Q_l(y),$$

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(f) = \int_a^b\int_c^d p(x)q(y)f(x,y)P_k(x)Q_l(y)dxdy.$$

Обозначим через

$$S_{N-1}(f;x,y) := \sum_{0<\overline{k},\overline{l}\le N-1} c_{k,l}(f)P_k(x)Q_l(y),$$

$$N=3,4,...;\overline{\nu}=max(1,\nu), \nu=0,1,...,$$

— его «гиперболические» частные суммы. Если $\mathcal{P}_n$ множество полиномов двух переменных степени не более $(N-1)$ вида $P_{N-1} = \sum\limits_{0\le\overline{k},\overline{l}\le N-1} a_{k,l}x^ky^l$, то легко убедиться [1],

$$E_{N-1}(f)_2 := \inf\left\{\|f-P_{N-1}\|_2 : P_{N-1}\in\mathcal{P}_{N-1}\right\} =$$

$$= \|f-S_{N-1}\|_2 = \left\{\sum_{\overline{k},\overline{l}\ge N} {c_{k,l}}^2(f)\right\}^{1/2}.$$

В L_2 рассмотрим функцию $T(x,u;y,v;h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} P_k(x)P_k(u)Q_l(y)Q_l(v)h^{k+l}$, где $h\in\ (0,1)$, $(x,u)\in(a,b)\times(a,b)$, $(y,v)\in$

$(c,d)\times(c,d)$. Введем оператор сдвига следующего вида

$$F_h f(x,y)=\int_a^b\int_c^d p(u)q(v)f(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv,\quad 0<h<1.$$

Определим конечные разности первого и высшего порядков равенствами

$$\Delta_h^1(f;x,y):=F_hf(x,y)-f(x,y)=(F_n-E)\,f(x,y),$$

$$\Delta_h^m(f;x,y)=\Delta_h^1\left(\Delta_h^{m-1}(f;x,y)\right)=(F_h-E)^m f(x,y)=$$

$$=\sum_{i=0}^m(-1)^{m-i}\binom{m}{i}F_h^i f(x,y),\ m\in\mathbb{N},$$

где $F_h^0 f(x,y)=f(x,y), F_h^i f(x,y)=F_h\left(F_h^{i-1}f(x,y)\right), (i=1,2,...,m;m\in\mathbb{N})$, а E — единичный оператор в пространстве L_2. Простые выкладки показывают, что

$$\Omega_m(f,t)_{L_2}=\sup\left\{\|\Delta_h^m(f;.,.)\|_2:0<h<t\right\}=$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty\left(1-(1-t)^{k+l}\right)^{2m}c_{k,l}^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Теорема. *Пусть $m,N\in\mathbb{N},0<p\le\infty,h\in(0,1)$, $g(t)$ — весовая на $[0,1]$ функция. Тогда при любых $N=4,5,6,...$ справедливо неравенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}(f)_2}{\left\{\int_0^h\Omega_m^p\,(f,t)_2\,g(t)dt\right\}^{\frac{1}{p}}}\le\left\{\int_0^h\left(1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right)^{mp}g(t)dt\right\}^{-\frac{1}{p}},\qquad(1)$$

причем при каждом фиксированном $N=4,9,16,...$ неравенство (1) обращается в равенство.

Следствие. *В условиях теоремы при $N=4,5,6,...,$ $g(t)=2\sqrt{N}(1-t)^{2\sqrt{N}-1}$, $0<t<1$ имеет место неравенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}(f)_2}{\left\{2\sqrt{N}\int_0^h\Omega_m^p\,(f,t)_2\,(1-t)^{2\sqrt{N}-1}dt\right\}^{\frac{1}{p}}}\le\frac{(mp+1)}{(1-(1-h)^{2\sqrt{N}})^{m+1/p}}.\qquad(2)$$

В частности, из (2), при $p=1/m$ и $h=1/2\sqrt{N},N=4,9,16,...$ вытекает равенство

$$\sup_N\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}(f)_2}{\left\{2\sqrt{N}\int_0^h\Omega_m^{1/m}\,(f,t)_2\,(1-t)^{2\sqrt{N}-1}dt\right\}^m}=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Некоторые другие результаты по этой тематике получены недавно в [2, 3].

Литература

1. *Абилова В.А., Керимов М.К.* Точные оценки скорости сходимости «гиперболических» частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т.52, №11, с.1952-1958.

2. *Шабозов М.Ш., Джурахонов О.А.* Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier–Hermite sums in the space $L_{2,\rho}(R^2)$. — Analysis Mathematica, 2019, v.45, №4 pp.823-840.

3. *Джурахонов О.* Приближение функций двух переменных «круговыми» суммами Фурье-Чебышева. — Владикавказский математический журнал. 2020, т.22, вып. 2, с.5-17.

Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе

Комонотонне наближення тригонометричними поліномами

Г.А. Дзюбенко

Нехай C – простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $r \in \mathbb{N}$, $C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів T_n степеня $\le n$ (порядку $\le 2n+1$) і на $[-\pi, \pi)$ задано $2s$, $s \in \mathbb{N}$, точок y_i : $-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi$, а для решти індексів $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначаються періодично (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...$), $Y_s := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Через $\Delta^{(1)}(Y_s)$ позначимо множину усіх $f \in C$, які не спадають на $[y_1, y_0]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д. Нехай

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) := \inf_{T_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y_s)} \|f - T_n\|$$

– величина найкращого комонотонного наближення f поліномами $T_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$. Доведено дві теореми (рівність (5) нова).

Теорема 1. *Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності*

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \le C(Y_s)\, \omega_2\left(f, \pi/n\right), \tag{1}$$

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \le \frac{C(Y_s)}{n}\, \omega_3\left(f', \pi/n\right), \quad f \in C^{(1)}, \tag{2}$$

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \le \frac{C(Y_s, r, k)}{n^r}\, \omega_k(f^{(r)}, \pi/n), \quad f \in C^{(r)},\ r \ge 2,\ k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

де $C(Y_s)$ і $C(Y_s, r, k)$ – сталі, які залежать тільки від $\min\limits_{i=1,...,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$ і r, k, відповідно, а $\omega_k(g, \cdot)$ – модуль гладкості k-го порядку функції g.

Теорема 2. *В множині $\Delta^{(1)}(Y_s)$ існують дві функції g_1 і $g_2 \in C^{(1)}$ такі, що*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(g_1, Y_s)}{\omega_3(g_1, \pi/n)} = +\infty, \tag{4}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{nE_n^{(1)}(g_2, Y_s)}{\omega_4(g_2', \pi/n)} = +\infty. \tag{5}$$

Отже, оцінки (1) і (2) точні за порядком. Представляється, що сталі в теоремі 1 не можна замінити сталими, незалежними від Y_s, однак це не доведено.

Інститут математики НАН України, Київ
e-mail: dzyuben@gmail.com

Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними

Р.І. Дмитришин

Нехай N — фіксоване натуральне число,

$$\mathcal{I} = \{i(k) : \ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k), \ 1 \le i_p \le i_{p-1}, \ 1 \le p \le k, \ k \ge 1, \ i_0 = N\}$$

— множина мультиіндексів і $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)} z_{i_3}}{1} + \ldots, \tag{1}$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$, називають багатовимірним S-дробом з нерівнозначними змінними.

Теорема. *Нехай для заданого $L > 0$ послідовність $\{c_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ додатних чисел задовольняє нерівності*

$$c_{i(1)} \le \frac{L}{2}, \ 1 \le i_1 \le N, \ c_{i(k)} \le \frac{L}{2 i_{k-1}} \ \textit{для всіх} \ i(k) \in \mathcal{I}, \ k \ge 2,$$

і нехай $f_n(\boldsymbol{z})$ – n-ий підхідний дріб багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (1). Тоді для всіх $z_k = |z_k| e^{i\alpha}$, $1 \le k \le N$, таких, що

$$|z_k| \le \frac{\sin 2\alpha}{L|\cos 3\alpha|}, \ 1 \le k \le N, \ \textit{і} \ \frac{\pi}{4} < \alpha \le \frac{\pi}{3}$$

існує

$$f(\boldsymbol{z}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{z})$$

і

$$|f(\boldsymbol{z}) - f_n(\boldsymbol{z})| \le \frac{C_{N+n}^{N-1} M^{n+1}}{d_0 (M^2 + d)^{n/2}}, \ n \ge 1,$$

де

$$M = \frac{\sin 2\alpha}{2|\cos 3\alpha|}, \ d_0 = |\sin \alpha|, \ d = |\sin \alpha \cos 2\alpha|.$$

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"
e-mail: dmytryshynr@hotmail.com

Оцінки апроксимації функції зі значеннями в гільбертовому просторі

С.В. Конарева

Нехай $L_2([0;2\pi];H)$ – простір 2π-періодичних функцій зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі H. Розглянемо послідовність операторів $Q_k,\ k\in\mathbb{Z}$, в якій $Q_0=I$ й Q_k $(k\neq 0)$ – компактні оператори, що діють у просторі H.

Функції $f(t)\in L_2([0;2\pi];H)$ з рядом Фур'є $f(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikt}$ поставимо у відповідність нову функцію $f_Q(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}Q_k(c_k)\,e^{ikt}$. Для кожного $k\neq 0$ запишемо канонічне зображення оператора Q_k:

$$Q_kx=\sum_j s_{kj}\,(x,\varphi_{kj})\,\psi_{kj},$$

де λ_{kj} власні числа оператора Q_k*Q_k, φ_{kj} – відповідні власні елементи, $s_{kj}=\sqrt{\lambda_{kj}}$ – s-числа оператора Q_k і $\psi_{kj}=\frac{1}{s_{kj}}Q_k\varphi_{kj}$.

Зауважимо, що для довільного $k\neq 0$ $\|Q_k\|=s_{k1}$.

Функції f поставимо у відповідність ще одну функцію

$$f_Q^{(-1)}(t)=\sum_{k\neq 0}\frac{1}{ik}Q_k(c_k)\,e^{ikt}.$$

Теорема 1. *Якщо оператори Q_k такі, що послідовність норм $\{\|Q_k\|\}$ не зростає з ростом $|k|$, то для довільної функції f та відповідної їй функції $f_Q^{(-1)}(t)=\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{ik}Q_k(c_k)\,e^{ikt}$ має місце точна нерівність*

$$E_n\left(f_Q^{(-1)}\right)\leq\frac{1}{4}s_{n,1}\int\limits_0^{\pi/n}\omega(f,t)\,dt.$$

Знак рівності досягається на функціях $f(t)=\varphi_{n1}e^{int}$.

($E_n\left(f_Q^{(-1)}\right)$ – величина найкращого наближення функції $f_Q^{(-1)}$ множиною узагальнених тригонометричних поліномів порядку не вище n.)

Висловлюю щиру подяку професору В.Ф. Бабенку за постановку задачі та корисні поради.

Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара
e-mail: ssvet0502@gmail.com

О лемме Рисса "о восходящем солнце"

А.А. Кореновский

При исследовании свойств сингулярных интегралов, максимальных функций и в ряде других вопросов важную роль играет следующая лемма Ф. Рисса "о восходящем солнце".

Лемма (Ф. Рисс, [1]). *Пусть функция* $f \in L(I_0)$, $I_0 \subset \mathbb{R}$ *и число* $\alpha \geq f_{I_0} \equiv |I_0|^{-1} \int_{I_0} f(x)\,dx$. *Тогда найдется дизъюнктивный набор интервалов* $\{I_j\}_{j \geq 1}$, *таких, что*

$$f_{I_j} = \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{a}$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \textit{п.в. на} \quad I_0 \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} I_j \right). \tag{b}$$

В работе Стейна [2] по поводу этой леммы приводится следующее высказывание "...had implicity played a key role in the earlier treatment of the Hilbert transform".

Различные доказательства этой леммы основаны на использовании разложения открытого множества из $\mathbb{R}$ на составляющие интервалы и не могут быть перенесены на многомерный случай.

Многомерным аналогом леммы Рисса можно считать следующую лемму Кальдерона – Зигмунда.

Лемма (Кальдерон, Зигмунд, [3]). *Пусть неотрицательная функция* $f \in L(Q_0)$, *где куб* $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ *и число* $\alpha \geq f_{Q_0}$. *Тогда найдется дизъюнктивный набор кубов* $\{Q_j\}_{j \geq 1}$, *таких, что*

$$\alpha \leq f_{Q_j} \leq 2^d \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{a}$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \textit{п.в. на} \quad Q_0 \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} Q_j \right). \tag{b}$$

Доказательство этой леммы основано на применении так называемой "техники моментов остановки".

Лемма Кальдерона – Зигмунда отличается от леммы Рисса тем, что в п. (a) вместо равенства $f_{I_j} = \alpha$ гарантируется лишь двусторонняя оценка $\alpha \leq f_{Q_j} \leq 2^d \alpha$. Это отличие часто сказывается на точности оценок, получаемых с помощью этих лемм.

Нетрудно убедиться в том, что при $d \geq 2$ в п. (a) леммы Кальдерона – Зигмунда, вообще говоря, нельзя гарантировать выполнение равенства $f_{Q_j} = \alpha$, как в лемме Рисса. Как оказалось, совсем иначе обстоит дело, если вместо кубов рассматривать многомерные параллелепипеды. Корректируя соответствующим образом доказательство леммы Кальдерона – Зигмунда, а именно, применяя "технику моментов остановки", в которой на каждом шаге производится "исправление" получаемых параллелепипедов, можем получить такое утверждение.

Лемма 1 ([4]). *Пусть функция $f \in L(R_0)$, где параллелепипед $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ и число $\alpha \geq f_{R_0}$. Тогда найдется дизъюнктивный набор параллелепипедов $\{R_j\}_{j\geq 1}$, таких, что*

$$f_{R_j} = \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{a}$$

и для п.в. $x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{j\geq 1} R_j\right) \equiv E$ существует последовательность стягивающихся к x параллелепипедов R'_k таких, что

$$f_{R'_k} \leq \alpha. \tag{b}$$

При $d = 1$, в силу известной теоремы Лебега о дифференцировании интегралов, из п. (b) леммы 1 следует, что

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{п. в. на} \quad E \tag{b'}$$

и, таким образом, мы получаем еще одно доказательство леммы Рисса, более простое, на наш взгляд, по сравнению с известными ранее.

Как известно, при $d \geq 2$ из п. (b) леммы 1 не следует (b'). Если же в лемме 1 дополнительно предположить, что $f \in L\log^{d-1} L$, то из теоремы Йессена – Марцинкевича – Зигмунда сразу получим, что в лемме 1 можно гарантировать выполнение свойства (b'). Во многих случаях для приложений этого было достаточно, но все же вопрос о необходимости условия $f \in L\log^{d-1} L$ оставался открытым.

В работе Безиковича [5] рассматривалась возможность перенесения леммы Рисса на многомерный случай по параллелепипедам. В этой работе, а также в известной книге Гусмана, имеется лемма, из которой можно получить, что при $d = 2$ в лемме 1 утверждение (b) можно заменить более сильным утверждением (b') без дополнительного предположения $f \in L\log L$. В работе [4] приводится простое доказательство этого факта. Если же $d \geq 3$, то доказательство можно было провести для случая $f \in L\log^{d-2} L$, но для $f \in L$ такое доказательство теряет силу.

В результате более тщательного анализа свойств параллелепипедов, которые возникают вследствие применения "техники моментов остановки" для доказательства леммы 1, выяснилось, что эти параллелепипеды обладают так называемым "диадическим" свойством, которое служит основой для того, чтобы совокупность таких параллелепипедов образовывала дифференциальный базис. После этого оставалось лишь, как и при доказательстве теоремы Лебега о дифференцировании интегралов, ввести соответствующую максимальную функцию и доказать, что она имеет слабый тип $(1-1)$. В результате в совместной с Лернером и Стоколосом работе была получена следующая

Лемма 2 ([6]). *Пусть мера μ абсолютно непрерывна, функция $f \in L_\mu(R_0)$, где параллелепипед $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, и число $\alpha \geq (\mu(R_0))^{-1} \int_{R_0} f(x)\, d\mu(x) \equiv f_{Q_0,\mu}$. Тогда найдется дизъюнктивный набор параллелепипедов $\{R_j\}_{j\geq 1}$, таких, что*

$$f_{R_j,\mu} = \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{a}$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \mu - \text{ п.в. на } \quad R_0 \setminus \left(\bigcup_{j\geq 1} R_j \right). \tag{b}$$

Интересно отметить, что в этой лемме на меру μ, кроме абсолютной непрерывности, никаких дополнительных ограничений не накладывается. В частности, не требуется привычного в вопросах дифференцируемости условия удвоения. Заметим также, что рассмотрение весового варианта леммы Рисса продиктовано не страстью к обобщению, а тем, что именно весовой вариант оказался полезным для приложений.

Список литературы

[1] F. Riesz, *Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent,* Acta Sci. Math. Szeged **5** (1932), 208–221.

[2] E.M. Stein, *Singular integrals: the roles of Calderón and Zygmund,* Notices Amer Math. Soc. **45**(1998), no. 9, 1130–1140.

[3] A.P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals,* Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[4] А.А.Кореновский. Лемма Рисса "о восходящем солнце" для многих переменных и неравенство Джона - Ниренберга. Матем. заметки, 77 (2005), № 1, С. 53 – 66.

[5] A.S. Besicovich, *On differentiation of Lebesgue double integrals,* Fundam. Math. **25** (1935), 209–216.

[6] A.A. Korenovskyy, A.K. Lerner, and A.M. Stokolos. On a multidimensional form of F. Riesz "rising sun" lemma. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), № 5, 1437 – 1440.

Одесский национальный
университет
имени И.И. Мечникова
e-mail: anakor1958@gmail.com

Закон співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень над простором неперервних функцій

М.В. Кузнєцов

Для функції $f : X \to X$ кажуть, що траєкторія $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ є гомоклінічною до циклу $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, якщо точка x_0 не є періодичною, її ω-гранична множина співпадає з $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, та існує деяка послідовність прообразів $\{x_{-1}, x_{-2}, ...\} \subset X$ для якої $f(x_{-k-1}) = x_{-k}, k \geq 0$, і множина всіх часткових границь цієї послідовності співпадає з $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$.

Для неперервних відображень відрізка порядок співіснування гомоклінічних траєкторій виглядая наступним чином:

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright ... \triangleright 2 \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright ...$$
$$... \triangleright 2^2 \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright ... \triangleright 2^n \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright ...$$

Якщо $f \in C^0(I, I)$ має n-гомоклінічну траєкторію, то для кожного m, для якого $n \triangleright m$, функція f має також m-гомоклінічну траєкторію.

Виникає питання: чи можна перенести цей закон на множини функцій, які діють не на відрізку, а на більш складній, зокрема, нескінченновимірній, множині. Цікавим кандидатом на роль такої множини є простір неперервних функцій відрізка $C^0(I, I)$, над яким діє відображення, яке також задається неперервною функцією відрізка: $F(\phi(x)) = f(\phi(x))$, $\phi \in C^0(I, I)$, та $f \in C^0(I, I)$.

Такі нескінченновимірні системи є, з однієї сторони, відносно простими для дослідження, а з іншого боку, вони мають важливе теоретичне значення, зокрема, до них зводяться різницеві рівняння з неперервним часом вигляду $x(t + 1) = f(x(t))$, $t \in R$.

Теорема

Має місце наступний порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень над $C^0(I, I)$ вигляду $F(\phi(x)) = f(\phi(x))$, $f \in C^0(I, I)$:

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright ... \triangleright 2 \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright ...$$
$$... \triangleright 2^2 \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright ... \triangleright 2^n \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright ...$$

Якщо відображення F має n-гомоклінічну траєкторію, то для кожного m, для якого виконується властивість $n \triangleright m$, F має також m-гомоклінічну траєкторію.

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
e-mail: mkuzniets@gmail.com

О коммутативности алгебры теплицевых операторов

З.М. Лысенко

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$, где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Обозначим через D_n область Зигеля в $\mathbb{C}^n$, определяемую следующим образом:

$$D_n = \left\{ z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z_n - |z'|^2 > 0 \right\}.$$

Пусть $d\nu(t) = dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n$, где $z_m = x_m + i\, y_m$, $m = \overline{1, n}$. Введем однопараметрическое семейство весовых мер

$$d\mu_\lambda(z) = \frac{\Gamma(n + \lambda + 1)}{4\pi^n \Gamma(\lambda + 1)} \left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2 \right)^\lambda \, d\nu(z), \quad \lambda > -1.$$

Обозначим через $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ весовое пространство Бергмана, состоящее из аналитических функций пространства $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$.

Пусть $B_{D_n,\lambda}$ – ортогональный проектор $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$ на $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$.

Введем теплицевый оператор

$$T_a = B_{D_n,\lambda} a\, I : \mathcal{A}^2_\lambda \ \mapsto \ \mathcal{A}^2_\lambda(D_n),$$

где символ

$$a = a\left(y_n - |z'|^2 \right) \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

I – тождественный оператор.

Через M обозначим C^*-алгебру, порожденную всеми теплицевыми операторами T_a, а через τ – C^*-алгебру, порожденную скалярными функциями

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda + 1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(v) \mathrm{e}^{-2\xi v} \cdot v^\lambda \, dv, \quad \xi \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть $C_b(\mathbb{R}_+)$ – алгебра всех непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}_+$.

Теорема. *C^*-алгебра M коммутативна и изоморфна C^*-подалгебре τ алгебры $C_b(\mathbb{R}_+)$. Указанный изоморфизм порожден следующим отображением образующих алгебр M и τ:*

$$\nu : \ T_a \ \mapsto \ \gamma_a = \gamma_a(\xi).$$

Одесский национальный
университет
имени И.И. Мечникова
e-mail: ivanpribegin@rambler.ru

Тауберові умови збіжності абстрактних та тригонометричних рядів

В.А. Михайлець, О.В. Циганок

Нехай X — дійсний або комплексний лінійний нормований простір (ЛНП) довільної розмірності, $\{x_k\}$ — вектори з X.

Теорема 1. *Нехай ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ *є* $(C,1)$*-сумовним до* $S \in X$ *і для деякого* $p \geq 1$ *виконується умова*

$$(A_p) \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^p = O(n^{1-p}), \quad n \to \infty.$$

Тоді цей ряд збігається до S *в ЛНП* X*.*

Зауважимо, що умова (A_p) слабша, ніж кожна з умов:

$$\|x_n\| = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty; \qquad \text{або} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}\|x_n\|^p < \infty.$$

Користуючись теоремою 1 і деякими іншими результатами, можна довести наступні твердження про збіжність ряду Фур'є

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1}$$

функції $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2. *Нехай функція* f *належить деякому однорідному функціональному банаховому простору* X *на* $\mathbb{T}$ *і виконані умови*

$$\begin{gathered} \|e^{int}\|_X = O(1), \qquad |n| \to \infty, \\ \sum_{|k|\geq n} |c_k|^p = O(n^{1-p}), \qquad n \to \infty, \qquad p \geq 1 \end{gathered} \tag{2}$$

Тоді ряд Фур'є (1) збігається до f *в банаховому просторі* X*.*

Зауважимо, що функціональні простори $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, сепарабельні простори Орліча, сепарабельні симетричні простори, простір $C(\mathbb{T})$, дійсний простір Гарді є однорідними.

Теорема 3. *Якщо коефіцієнти ряду Фур'є (1) задовольняють тауберову умову (2), то ряд (1) збігається до* f *рівномірно на кожній компактній підмножині її точок неперервності.*

Інститут математики
НАН України
e-mail: mikhailets@imath.kiev.ua

НТУУ „КПІ імені Ігоря Сікорського“
e-mail: tsyhanok.ok@gmail.com

Методи зрізки для чисельного диференціювання періодичних функцій двох змінних

С.В. Переверзєв, Є.В. Семенова, С.Г. Солодкий, С.А. Стасюк

Об'єктом нашого дослідження є періодичні гладкі функції двох змінних за припущення, що їх коефіцієнти Фур'є відомі лише приблизно.

Нашою метою є побудова та обґрунтування нових ефективних варіантів методу зрізки Фур'є для задачі чисельного диференціювання функцій двох змінних з класів L_2^{μ}, які узагальнюють класи функцій з домінуючою мішаною похідною.

На сьогодні існує декілька підходів щодо того, як вибрати область підтримки Ω, яка містить "номери" коефіцієнтів Фур'є. Ми розглядаємо два найпопулярніших та найефективніших підходи. Перший (стандартний) підхід полягає в тому, що за область Ω вибирається квадрат, а другий (модифікований) підхід до вибору Ω пов'язаний з гіперболічним хрестом.

В результаті проведених досліджень отримано такі результати:

— на підставі стандартного та модифікованого підходів розроблено різні варіанти методу зрізки Фур'є;

— для розроблених методів знайдено оптимальне значення параметра дискретизації в задачі чисельного диференціювання функцій з класів L_2^{μ};

— оцінено найкращу можливу точність наближення похідних та обсяг використаної дискретної інформації у вигляді коефіцієнтів Фур'є;

— проведено порівняльний аналіз ефективності методів за такими характеристиками як точність наближення та обсяг інформації;

— надано рекомендації щодо вибору найбільш ефективних методів чисельного диференціювання;

— проведено чисельні експерименти на тестових прикладах з метою перевірки ефективності побудованих методів.

Частина наведених вище досліджень була виконана в рамках проєкту (номер проєкту 645672) MSCA-RISE-2014 ЄС-Горизонт 2020 під час відвідування Інституту обчислювальної та прикладної математики ім. Йоганна Радона (RICAM) авторами з Інституту математики НАН України. Висловлюємо вдячність за гарні умови праці в RICAM та підтримку консорціуму AMMODIT.

Інститут обчислювальної та
прикладної математики
ім. Йоганна Радона
e-mail: sergei.pereverzyev@oeaw.ac.at

Інститут математики
НАН України
e-mail: semenovaevgen@gmail.com
solodky@imath.kiev.ua
stasyuk@imath.kiev.ua

Про узагальнення поточкових інтерполяційних оцінок опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку

Т.О. Петрова, І.Л. Петрова

Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $\left|f^{(r)}(x)\right| \leq 1$ майже скрізь на [0,1]. Теляковський [1] для $r = 1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського – Тіммана довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r)\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)^r, n > r \qquad (1)$$

де c - абсолютна стала.

DeVore та Yu довели, що при $r = 1, 2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n, такий, що має місце (1). Gonska, Leviatan, Shevchuk, Wenz довели, що для натурального $r > 2$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна. Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено, що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$ майже скрізь на [0,1] (тут $D_{0+}^{r-1}f$ - лівостороння дробова похідна).

Будемо позначати через Π_n- множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^2 множину опуклих вниз на $[0,1]$ функцій.

Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат робіт на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^2$ з $r > 4, r \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Нехай $r > 4$. Тоді для кожного n існує функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$ така, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$ і для будь-якої додатної на (0;1) функції ψ, такої, що $\lim\limits_{x\to 0} \psi(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to 1} \psi(x) = 0$ справедлива одна з таких властивостей:*

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty$$

або

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty$$

Київський національний
університет
імені Тараса Шевченка
e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

Київський національний
університет
імені Тараса Шевченка
e-mail: irynapetrova1411@gmail.com

Узагальнені Моментні Зображення та Двовимірні Двоточкові Апроксимації Типу Паде

О. Пожарський

Метод узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика, який був запропонований у 1981 р. [1], дав можливість будувати та досліджувати апроксиманти Паде та різноманітні їх узагальнення для широких класів аналітичних та спеціальних функцій [2]. Також цей метод був застосований до побудови та дослідження двох- та багатоточкових апроксимант Паде [3], [4]. У [5], [6] було запропоноване поширення методу на випадок багатовимірних послідовностей. У доповіді мова буде йти про застосування методу В.К. Дзядика для дослідження двовимірних двоточкових апроксимант типу Паде [7].

1. Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів. Доп. АН УРСР, 1981, **6**, 8 – 12.

2. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ.: Ін-т математики НАН України, 2002, 222 с.

3. Голуб А. П. Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. — Киев, 1981, 16 – 56. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58)

4. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та багатоточкові апроксимації Паде. Укр. мат. журн., 2004, **56**, №7, 991 – 995.

5. Голуб А. П., Чернецька Л. О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних. Укр. мат. журн., 2013, **65**, №8, 1035 – 1058.

6. Голуб А. П., Чернецька Л. О. Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних. Укр. мат. журн., 2014, **66**, №9, 1166 – 1174.

7. Голуб А. П., Пожарський О. А., Чернецька Л. О., Узагальнені моментні зображення та багатовимірні багатоточкові апроксимації типу Паде. Укр. мат. журн., 2019, **71**, №10, 1331 – 1346.

Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
e-mail: PozharskyiO@gmail.com

Про деякі нерівності типу Джексона

О.В. Поляков

Нехай C - простір неперервних 2π - періодичних функцій з нормою $\|f\|$.

Через C^r позначаємо простір функцій $f(t)$ таких, що $f^{(r)} \in C$ відповідно.

Нехай $\omega(f;\delta)$, $\omega_2(f;\delta)$ відповідно модуль неперервності та модуль гладкості функції $f \in C$.

Нехай $\mathcal{N}$- скінченовимірний підпростір. $E(f;\mathcal{N}) = \inf_{g\in\mathcal{N}} \|f-g\|$ - найкраще наближення функції $f \in C$ підпростором $\mathcal{N}$.

В ролі підпростору $\mathcal{N}$ будемо розглядати T_{2n-1} - підпростір тригонометричних поліномів порядку $\leq n-1$ та $S_{2n,\mu}$- підпростір поліноміальних сплайнів мінімального дефекту порядку μ с $2n$ рівновіддаленими вузлами.

Теорема 1. *(Лигун А.О.) Нехай $n, r = 1,2,3,...,$ $\mu \geq r$. Тоді*

$$\sup_{f\in C^r f\neq const} \frac{E(f;T_{2n-1})}{\omega(f^{(r)};\delta)} = \sup_{f\in C^r f\neq const} \frac{E(f;S_{2n,\mu})}{\omega\ (f^{(r)};\delta)} = \frac{K_r}{2n^r}, \tag{1}$$

де $\delta \geq \frac{\pi}{n}$ для непарних r і $\delta \geq \frac{2\pi}{n}$ для парних r, K_r- константа Фавара.

Нехай $k \in N$. І функція $\psi_{0,2k+1}(x)$ - непарна, кусково неперервна, 2π-періодична, та визначена при розбитті $\{\frac{j\pi}{2k+1}\}$, $j \in Z$ наступним чином:

$$\psi_{0,2k+1}(0), \quad \psi_{0,2k+1}(x) = 2j+1, \ \ x \in \left(\frac{j\pi}{2k+1}; \frac{(j+1)\pi}{2k+1}\right], \ \ j = 0,1,...,k-1,$$

$$\psi_{0,2k+1}(x) = 2k+1, x \in \left(\frac{k\pi}{2k+1}; \frac{\pi}{2}\right], \psi_{0,2k+1}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \psi_{0,2k+1}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Для натуральних r $\psi_{r,2k+1}(x)$ є r-м 2π-періодичним інтегралом функції $\psi_{0,2k+1}(x)$ з нульовим середнім значенням на періоді, $\psi_{n,r,2k+1}(x) = \frac{\psi_{0,2k+1}(nx)}{n^r}$.

Теорема 2. *(Пічугов С.О.) Нехай $n = 1,2,3,...,$ $r = 1,3,5,...,$ $\mu \geq r$. Тоді для будь-якої функції $f \in C^r$ виконується рівність*

$$\sup_{f\in C^r f\neq const} \frac{E(f;T_{2n-1})}{\omega\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n(2k+1)}\right)} = \sup_{f\in C^r f\neq const} \frac{E(f;S_{2n,\mu})}{\omega\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n(2k+1)}\right)} = \frac{\|\psi_{r,2k+1}\|}{2n^r}, \tag{2}$$

Теорема 3. *Нехай $n = 1,2,3,...,$ $r = 1,3,5,...,$ $\mu \geq r$ і підпростір $\mathcal{N}$ є T_{2n-1}, або $S_{2n,\mu}$. Тоді існує константа $M_{r,k}$, для будь-якої функції $f \in C^r$ виконується точна нерівність $E(f;\mathcal{N}) \leq$*

$$\leq \frac{1}{2}\left(M_{r,k}\omega\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n(2k+1)}\right) + \left(\|\psi_{n,r,2k+1}\| - M_{r,k}\right)\omega_2\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{2n(2k+1)}\right)\right).$$

Ця теорема є аналогом нерівності Шалаєва В.В. з лінійною комбінацією модуля неперервності в точці $\frac{\pi}{n}$ та модуля гладкості в точці $\frac{\pi}{2n}$.

Дніпропетровський обласний ліцей-інтернат фізико-математичного профілю
e-mail: polyakovolegvladimirovich@gmail.com

О приближении функций и её производных тригонометрическими полиномами в L_2

Ф. Раимзода

В работе решена задача одновременного приближения функции и ее последовательных производных тригонометрическими полиномами в L_2 на некоторых классах функций, задаваемых усредненными значениями нормы разности первого порядка. Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Множество тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x)$ порядка $n-1$ обозначим $\Im_{2n-1}$. Если $S_{n-1}(f,x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big),$$

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big),$$

то хорошо известно свойство частичной суммы ряда Фурье функций f, что наилучшее приближении функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x) \in \Im_{2n-1}$ реализуется частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f,x)$:

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\{\|f - T_{n-1}\|_2 : \ T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$. Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, $f^{(r)} \in L_2$. Модуль непрерывности m-го порядка произвольной 2π-периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определим равенством [1, 2]

$$\omega_m(f,t) := \sup\left\{\left\|\triangle_h^m f(\cdot)\right\|_2 : \ |h| \le t\right\},$$

где $\triangle_h^m f(x)$ — разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Имеем

$$\left\|\triangle_h^m f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{m}(1-\cos kh)^m k^{2r}\rho_k^2(f), \quad E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f).$$

Теорема 1. *При любых* $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\triangle_h^1 f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2 dh\right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))},$$

где $Si(t)$ *— интегральный синус.*

Через $W^{(r)}(h)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi/n]$) обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, каждая из которых удовлетворяет условию

$$\int_0^h \left(\frac{1}{t}\int_0^t \left\|\triangle_u^1 f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2 du\right) dt \leq 1.$$

Требуется при любых $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(h)\big)_2 := \sup\left\{ E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 : \ f \in W^{(r)}(h)\right\}.$$

Теорема 2. *При любых* $r, n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $h \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(h)\big)_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Литература

1. *Тайков Л.В.* Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2. — Матем. заметки, 1977, т.22, №4, с.535-542.

2. *Шабозов М.Ш., Мамадаезов Н.М.* О неравенствах типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций, задаваемых усредненными модулями непрерывности в пространстве L_2. — Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, №1(146), с.7-17.

Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе

Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського–Бєсова

А.С. Романюк, В.С. Романюк

Доповідь складається з двох частин.

У першій частині мова йтиме про про точні значення ортопоперечників (а також схожих за визначенням величин) класів Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і Соболєва $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ періодичних функцій з однією та багатьма змінними у просторі $B_{\infty,1}$. Особливістю простору $B_{\infty,1}$, як лінійного підпростору в L_∞, є те, що його нормування здійснюється на основі розкладу функцій з L_∞ у ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ і відповідна норма у цьому просторі є більш "сильною", ніж L_∞ – норма.

В другій частині об'єктами аналізу є лінійні оператори, які є оптимальними в задачі про точні за порядком значення найкращих наближень класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів, породжених системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Q}_n}$, де множини $\mathbb{Q}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — так звані східчасто гіперболічні хрести в $\mathbb{Z}^d$. Одним із ключових тут є питання, що стосується послідовності норм таких операторів (як операторів, що діють із L_∞ в L_∞), а саме — питання щодо обмеженості чи необмеженості цієї послідовності.

Буде показано, що на відміну від одновимірного випадку ($d = 1$), у випадку $d \geq 2$ лінійні оператори, які реалізують порядкові значення найкращих наближень класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів вказаної структури, — необмежені. На додачу приводяться порядкові значення знизу для норм кожного із елементів послідовності таких операторів.

Інститут математики НАН України
e-mail: romanyuk@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України
e-mail: vsromanyuk@imath.kiev.ua

Рівність оцінок МНК та Ейткена параметрів квадратичної моделі регресії у випадку гетероскедастичних відхилень

М.Ю. Савкіна

Розглянемо модель квадратичної регресії

$$y_i = at_i^2 + bt_i + c + \epsilon_i, \qquad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\epsilon_0, ..., \epsilon_n$ – незалежні у сукупності випадкові величини з $E\epsilon_i = 0$ та $D\epsilon_i = \lambda_i \sigma^2,\ \lambda_i > 0, i = 0, 1, ..., n.$

Поставимо задачу знайти умови на дисперсії відхилень, при яких збігаються оцінки Ейткена та МНК кожного параметра моделі (1) окремо (одночасно для трьох параметрів ці оцінки будуть збігатися тільки у випадку всіх рівних дисперсій). У випадку парного n да бісиметричної коваріаційної матриці доведено достатню умову для збігу відповідних оцінок параметра a.

Нехай $n = 2k$. Розглянемо рівняння відносно змінної λ_k

$$\frac{3(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-1} - 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} - \frac{8(-k^2-k+3)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-2}+$$

$$+2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})\sum_{j=0}^{k-3}\frac{\alpha_j\lambda_k\big((1-(k-j)^2)\lambda_{k-1}+(k-j)^2\frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\lambda_k\big)}{\gamma_j\lambda_{k-2}+\zeta_j\lambda_{k-1}-\beta_j\lambda_k} = 0, \tag{2}$$

де

$\alpha_j = \frac{2k^2-k(6j+1)+3j^2}{k(k+1)},\ \gamma_j = (k-j)^2-4, \zeta_j = (k-j)^2-1,\ \beta_j = \frac{(k-j)^2(2k^2+2k-15)}{k(k+1)}.$

Теорема. *Якщо в моделі (1)* λ_{k-1} *приймає будь-яке додатне значення;* $\lambda_{k-2} = \tilde{\lambda}_{k-2}$, *де* $\tilde{\lambda}_{k-2}$*– будь-яке значення з інтервалу* $\big(\nu\zeta_{i^*-1}\lambda_{k-1}/\gamma_{i^*-1}, \nu\zeta_{i^*}\lambda_{k-1}/\gamma_{i^*}\big)$, $i^* = \big[k-\sqrt{k(k+1)/3}\big],\ \nu = \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}$; $\lambda_k = \lambda_k^*$, *де* λ_k^**– розв'язок рівняння (2) на проміжку*

$$\big[(\gamma_{i^*}\tilde{\lambda}_{k-2}+\zeta_{i^*}\lambda_{k-1})/\beta_{i^*}, (\gamma_{i^*-1}\tilde{\lambda}_{k-2}+\zeta_{i^*-1}\lambda_{k-1})/\beta_{i^*-1}\big];$$

$\lambda_j = \lambda_j^*,\ j = 0, 1, ..., k-3,$ *де* $\lambda_j^* = \frac{\alpha_j\lambda_k^*(4\tilde{\lambda}_{k-2}+\lambda_{k-1})}{\gamma_j\tilde{\lambda}_{k-2}+\zeta_j\lambda_{k-1}-\beta_j\lambda_k^*}$;
$\lambda_{k+j} = \lambda_{k-j},\ j = 1, 2, ..., k,$

то оцінки МНК та Ейткена параметра a в моделі (1) збігаються.

Інститут математики НАНУ
НАНУ
e-mail: marta@imath.kiev.ua

Опис класу Шура в термінах коефіцієнтів ряду за базисом Лагера

В.В. Савчук, М.В. Савчук

Нехай $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – повна ортонормована система в просторі Гарді H^2 і нехай

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \tag{1}$$

– формальний ортогональний ряд з комплексними коефіцієнтами. Якими є необхідні та достатні умови на послідовність коефіцієнтів $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ для того, щоб сума f ряду (1) була функцією Шура, тобто була голоморфною функцією в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і задовольняла умову $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$?

І. Шур дав розв'язок цієї задачі у випадку, коли система φ має вигляд $\varphi_k(z) = z^k$, а ряд (1) є формальним степеневим рядом.

Ми розглянули випадок, коли система φ є базисною системою Лагера в крузі $\mathbb{D}$, тобто, коли

$$\varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\overline{a}} \left(\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\right)^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де a – фіксована точка в крузі $\mathbb{D}$.

Теорема 1. *Нехай $a \in \mathbb{D}$, φ – система Лагера і $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел. Сума ряду (1) є функцією Шура тоді і тільки тоді, коли нерівність*

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{n} c_{j-k}\lambda_j \right|^2 \leq (1-|a|^2) \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{n} (-\overline{a})^{j-k}\lambda_j \right|^2$$

справджується для всіх цілих $n \geq 0$ і будь-якої послідовності комплексних чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$.

При $a = 0$ (мається на увазі, що $0^0 = 1$) теорема 1 збігається з відомим критерієм Шура.

Як наслідок теореми 1 маємо, наприклад, таке співвідношення:

$$\sup \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |S_k(f)(t)| \leq 1 + |a|, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ |t| = 1,$$

де супремум береться по множині усіх функцій Шура, а S_k – частинна сума ряду (1).

Інститут математики НАН України
e-mail: savchuk@imath.kiev.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського
e-mail: maryna1savchuk@gmail.com

Порядкові оцінки рівномірних наближень сумами Зигмунда на класах згорток періодичних функцій

А.С. Сердюк, У.З. Грабова

Позначимо через $C^{\psi}_{\beta,p}$ — клас неперервних 2π–періодичних функцій f, які зображуються у вигляді згортки $f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta}(t)\varphi(x-t)dt$, $a_0\in\mathbb{R}$, $\varphi\perp 1$, $\|\varphi\|_p\le 1$, $1\le p\le\infty$ з твірним ядром $\Psi_{\beta}(t)\in L_{p'}$, $1/p+1/p'=1$, вигляду $\Psi_{\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\psi(k)\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Розглядається задача про знаходження порядкових оцінок величин $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,p};Z^s_{n-1}\right)_C=\sup\limits_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}}\|f-Z^s_{n-1}(f)\|_C$, де $Z^s_{n-1}(f;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$, $s>0$, — суми Зигмунда порядку $n-1$ функцій f із $C^{\psi}_{\beta,p}$ та досліджується питання: при яких обмеженнях на ψ,p,s і β суми Зигмунда на класах $C^{\psi}_{\beta,p}$ забезпечують порядок найкращих наближень $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C=\sup\limits_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}}\inf\limits_{t_{n-1}}\|f(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\|_C$ тригонометричними поліномами t_{n-1} порядку $n-1$.

Покладемо при $\delta>0$ $g_{\delta}(t):=\psi(t)t^{\delta}$, $t\in[1,\infty)$. Позначимо через $\mathfrak{M}_0$ множину неперервних опуклих донизу функцій $g:[1,\infty)\to R_+$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$ і для яких існує стала $K>0$, що $\alpha(g;t):=\frac{g(t)}{t|g'(t)|}\ge K>0$.

Для невід'ємної послідовності $g=\left\{g_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ будемо писати $g\in GM^+$, якщо $\exists A\ge 1\ \forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $n_1\le n_2$: $a_{n_1}+\sum_{k=n_1}^{m-1}|a_k-a_{k+1}|\le Aa_m$, $m=\overline{n_1,n_2}$. Якщо $\exists\varepsilon>0\ \exists K>0\ \forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $n_1\le n_2$: $g_{n_1}n_1^{-\varepsilon}\le Kg_{n_2}n_2^{-\varepsilon}$, то для невід'ємної послідовності $g=\left\{g_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ запишемо $g\in GA^+$.

Теорема. *Нехай $s>0$, $1\le p<\infty$, $g_{1/p}\in\mathfrak{M}_0$, $g_{s+1/p}\in GM^+\cap GA^+$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$. Тоді: при $1<p<\infty$ за виконання умови $\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, та нерівності $\inf\limits_{t\ge 1}\alpha(g_{1/p};t)>\frac{p'}{2}$, мають місце порядкові рівності $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,p};Z^s_{n-1}\right)_C\asymp\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}$, $1/p+1/p'=1$; при $p=1$ за виконання умови $\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)<\infty$ та нерівності $\inf\limits_{t\ge1}\alpha(g_1;t)>1$ мають місце порядкові рівності*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C\asymp\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,1};Z^s_{n-1}\right)_C\asymp\begin{cases}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), & \cos\beta\pi/2\ne 0;\\ \psi(n)n, & \cos\beta\pi/2=0.\end{cases}$$

Інститут математики
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

Волинський національний
університет імені Лесі Українки
e-mail: grabova_u@ukr.net

Наближення задач Коші задачами Коші без розв'язків і з багатьма розв'язками

В.Ю. Слюсарчук

Справджуються такі два твердження.

Теорема 1 ([1]). *Нехай* E *і* $f : \mathbb{R} \times E \to E$ *– довільні нескінченновимірний банахів простір і неперервне відображення відповідно.*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ *і числа* $\varepsilon > 0$ *існує таке неперервне відображення* $g : \mathbb{R} \times E \to E$*, що*

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times E} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon$$

і задача

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)),\ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),\ z(t_0) = z_0$$

не має жодного розв'язку для кожного $\delta > 0$.

Теорема 2 ([2]). *Нехай* G *– область у просторі* $\mathbb{R} \times E$ *і* $f : G \to E$ *– довільне неперервне відображення (банахів простір* E *може мати довільну розмірність).*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in G$ *і числа* $\varepsilon > 0$ *існує таке неперервне відображення* $g : G \to E$*, що*

$$\sup_{(t,x) \in G} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon$$

і задача

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

має більше одного розв'язку.

[1] В.Е. Слюсарчук, *Плотность множества неразрешимых задач Коши во множестве всех задач Коши в случае бесконечномерного банахова пространства*, Нелінійні коливання, **5**, № 1, 86–89 (2002).

[2] В.Ю. Слюсарчук, *Щільність множини всіх задач Коші з неєдиними розв'язками у множині всіх задач Коші*, Укр. мат. журн., **64**, № 7, 1000–1006 (2012).

Національний університет
водного господарства та
природокористування
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Критерій елемента найкращого наближення функцій багатьох змінних у просторі $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$

М.Є. Ткаченко, В.М. Трактинська

Нехай $L_{p_1,\ldots,p_n}(1 \le p_i < \infty, 1 \le i \le n)$ – простір сумовних на $K = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, де $I_i = [a_i, b_i], 1 \le i \le n$, функцій $f : K \to \mathbb{R}$ із нормою

$$\|f\|_{p_1,\ldots,p_n} = \left[\int\limits_{I_n} \ldots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|^{p_1} dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right]^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}},$$

Позначимо $|f|_{p_k,\ldots,p_i} = \left[\int\limits_{I_i} \ldots \left[\int\limits_{I_{k+1}} \left[\int\limits_{I_k} |f(x)|^{p_k} dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1}\right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \ldots dx_i\right]^{\frac{1}{p_i}}$, де $1 \le k < i \le n$.

Нехай $H_m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ для деякої системи лінійно незалежних функцій $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset L_{1,p_2,\ldots,p_n}$, $(1 < p_i < \infty, i = 2, ..., n)$. Тоді елементи множини H_m (поліноми P_m) подають у вигляді $P_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$.

Розглядається випадок наближення функцій у метриці простору $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$, $(1 < p_i < \infty, i = 2, ..., n)$ поліномами множини H_m.

Уведемо функції

$F_0 = |f - P_m^*|_1^{p_2-1} |f - P_m^*|_{1,p_2}^{p_3-p_2} |f - P_m^*|_{1,p_2,p_3}^{p_4-p_3} \cdot \ldots \cdot |f - P_m^*|_{1,p_2,\ldots,p_{n-1}}^{p_n-p_{n-1}} \operatorname{sgn}(f - P_m^*)$,

$F_0^* = \frac{F_0}{||f-P_m^*||_{1,p_2,\ldots,p_n}^{p_n-1}}$, де $P_m^* \in H_m$. Для $(x_2, ..., x_n) \in I_2 \times \ldots \times I_n$ позначимо $e(x_2, ..., x_n) = \{x_1 \in I_1 : f - P_m^* = 0\}$.

Нехай $f \in L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ така, що для кожного P_m норма $||f - P_m|| > 0$.

Теорема. *Для того щоб поліном P_m^* був поліномом найкращого наближення для функції f у метриці $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ $(1 < p_i < \infty$, $i = 2, 3, ..., n)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого полінома $P_m \in H_m$ виконувалася умова*

$$\left|\int\limits_K P_m \cdot F_0^* dx_1 \ldots dx_n\right| \le \int\limits_{I_1} \ldots \int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{e(x_2,\ldots,x_n)} |P_m| dx_1\right] \left[\operatorname*{ess\,sup}_{x_1 \in I_1} |F_0^*|\right] dx_2 \ldots dx_n.$$

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
e-mail: mtkachenko2009@ukr.net

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
e-mail: traktynskaviktoriia@gmail.com

Неравенства между наилучшими совместными полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана $\mathscr{B}_2$

М.Ш. Шабозов, Н.У. Кадамшоев

Рассматривается задача среднеквадратического полиномиального приближения аналитических в единичном круге U функций f, принадлежащих пространству Бергмана $\mathscr{B}_2$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{\mathscr{B}_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2\, d\sigma\right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади. Пусть $\mathscr{B}_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ \mathscr{B}_2^{(0)} \equiv \mathscr{B}_2)$ — множество функций $f \in \mathscr{B}_2$, у которых производная r-го порядка $f^{(r)} \in \mathscr{B}_2$. Символом $\Delta_h^m(f;\rho,u,h)$ — обозначим конечную разность m-го порядка функций $f(\rho e^{it}) \in \mathscr{B}_2$ по аргументу t в точке u с шагом h и положим

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho\big|\Delta_h^m(f;\rho,u,h)\big|^2\, d\rho du.$$

Равенством $\omega_m(f,t)_2 := \sup\left\{\left|\Delta_h^m(f)\right\|_2^2 :\ |h| \le t\right\}$ определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in \mathscr{B}_2$. Под усредненной характеристикой гладкости функции $f \in \mathscr{B}_2$ будем понимать величину [1, 2]

$$\Lambda_m(f,t)_2 := \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h^m(f)\right\|_2^2 dh\right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathscr{P}_n$ — множество комплексных алгебраических полиномов степени $\le$ n, а

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 := \inf\left\{\left\|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\right\|_2 : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\right\}$$

— наилучшее совместное приближение функций $f \in \mathscr{B}_2^{(r)}$ и её последовательных производных $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ принадлежащих $\mathscr{B}_2^{(r)}$.

Приведём основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$ и $t \in (0, 2\pi/(n-r)]$. Тогда для произвольной функции $f \in \mathscr{B}_2^{(r)}$ справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot J_{1,m}^{-1}((n-r)t)\,\Lambda_m(f^{(r)},t)_2, \qquad (1)$$

где $J_{1,m}(\tau) = \left\{(1/\tau)\int\limits_0^\tau (1-\cos u)^m du\right\}^{1/2}$. *Неравенство* (1) *точное в том смысле, что для функции* $f_0(z) = z^n \in \mathscr{B}_2^{(r)}$ *обращается в равенство.*

Теорема 2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $h \in (0, 2\pi/(n-r)]$, $q(t)$ — *неотрицательная суммируемая неэквивалентная нулю на отрезке* $[0, h]$ *весовая функция. Тогда для произвольного* $p \in (0, +\infty]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_2^{(r)}\\ f\neq\mathscr{P}_n}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\, E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2\, q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Следствие. *В условиях теоремы 2 при* $p = 2$, $q(t) \equiv 1$ *и* $h = \pi/(n-r)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_2^{(r)}\\ f\neq\mathscr{P}_n}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\, E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n-r}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/(n-r)} \Lambda_m^2(f^{(r)}, t)_2 dt\right)^{1/p}} = \frac{\pi}{2^m}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}.$$

Литература

1. *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ — Матем. сборник, 1994, т.185, №8, С.81-102.

2. *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций — Матем. заметки. 2016, т.99, вып.2, с.215-238.

3. *Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.* Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников — Матем. заметки. 2018, т.103, вып.4, с.617-631.

4. *Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.* Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам. — Труды ИММ УрО РАН, 2019, т.25, №2, с.258-272.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе

Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе

Неравенства между наилучшим приближением и неклассическим модулем непрерывности в пространстве L_2

М.Ш. Шабозов, Алаа Сайфулрахман-ал-Курайши

В работе получены точные оценки величины наилучшего среднеквадратического приближения произвольной комплекснозначной 2π-периодической функции тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и усреднённым значением квадрата неклассического модуля непрерывности $\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)},t)$ с произвольным весом $q(t)$ в пространстве L_2. Пусть $L_2 := L_2[0,2\pi]$ — пространство 2π-периодических комплекснозначных измеримых функции f, квадрат модуля которых суммируем на периоде с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

$L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ L_2^{(0)} \equiv L_2)$ — множество функций f, у которых производные $f^{(r-1)}$ порядка $(r-1)$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Через $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами вида $T_{n-1}(x) = \sum\limits_{|k|\le n-1} a_k e^{ikx},\ a_k \in \mathbb{C}$ и равенством

$$E_{n-1}(f)_2 := E_{n-1}(f,\mathcal{T}_{2n-1})_2 = \inf\Big\{\|f-T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} \qquad (1)$$

определим величину наилучшего приближения функций $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$. Известно, что среди всех тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ точную нижнюю грань в правую часть (1) реализует частная сумма $S_{n-1}(f,x) = \sum\limits_{|k|\le n-1} c_k(f)e^{ikx}$ порядка $n-1$ ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} c_k(f)e^{ikx}$. При этом

$$E_{n-1}(f)_2 = \Big(\sum_{|k|\ge n} |c_k(f)|^2\Big)^{1/2} := \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2},\ \rho_k^2(f) := |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2,$$

$$k \ge n.$$

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и следуя [1, 2, 3] введем разностный оператор

$$\widetilde{\triangle}_h^{2m-1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} (-1)^{\nu+1} f(x+\nu t)$$

действующий из L_2 в L_2. Определим соответствующий модуль непрерывности

$$\widetilde{\omega}_{2m-1}(f,t)_2 := \sup\{\|\widetilde{\triangle}_h^{2m-1}(f)\|_2 : \quad |h| \le t\}, \quad t > 0.$$

Для $m,n,r \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ 0 < t \le h, h \in (0, 2\pi/n]$ q — весовая на $[0,h]$ функция введём в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\chi_{n,m,r,p}(q,h) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Теорема 1. *Пусть $m,n,r \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ h \in (0, 2\pi/n]$, q — весовая на $[0,h]$ функция. Тогда справедливы равенства*

$$\{I_{n,m,r,p}(q,h)\}^{-1} \le \chi_{n,m,r,p}(q,h) \le \{\inf_{n\le k<\infty} I_{k,m,r,p}(q,h)\}^{-1}, \qquad (2)$$

где

$$I_{k,m,r,p}(q,h) = \left(k^{rp}\int_0^h \mathcal{P}_m^{p/2}(kt)q(t)dt\right)^{1/p}, \ \mathcal{P}_m(kt) := \frac{1-\cos 2mkt}{1+\cos kt}.$$

Теорема 2. *Пусть $n,m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le p \le 2$, $h \in (0, 2\pi/n]$ — произвольное число, $q(t) \equiv 1$. Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int_0^h \mathcal{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/p}},$$

и, в частности, при $p = 2$ и $h = \pi/n$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad m \ge 2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Литература

1. *Бабенко А.Г.* О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами. — Труды ИММ УрО РАН, 2001, т.7, №1, с.30-46.

2. *Барабошкина Н.А.* Неравенство Джексона-Стечкина с неклассическим модулем непрерывности. — Труды ИММ УрО РАН, 2001, т7, №1, с.62-67.

3. *Шабозов М.Ш., Фарозова А.Д.* Точное неравенство Джексона-Стечкина с неклассическим модулем непрерывности. — Труды ИММ УрО РАН, 2016, т22, №4, с.311-319.

Таджикский национальный
университет, г.Душанбе

ОАЭ, г.Медине,
Таджикский национальный
университет, г.Душанбе

Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для дифференцируемых в смысле Вейля функций в $L_2[0, 2\pi]$

А.А. Шабозова

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности. Введение таких модификаций модуля непрерывности позволяет сформулировать естественные аналоги задач теории приближения и получить содержательные результаты. В случае аппроксимации 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в работах [1, 2] вместо оператора сдвига $T_h(f) := f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$ была использована функция Стеклова $S_h(f)$, приведенная ниже. Здесь продолжим указанную тематику и обобщим некоторые результаты [1, 2] для классов функций, дифференцируемых в смысле Вейля. Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом модуля по Лебегу 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Для произвольной функции $f \in L_2$ запишем функцию Стеклова

$$S_h(f, x) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt, \quad h > 0$$

и положем $S_{h,i} = S_h(S_{h,i-1}(f))$, $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) = f$. Обозначим через $\mathbb{I}$ – единичный оператор в L_2 и, следуя работам [1, 2], определим конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\Delta_h^1(f, x) := S_h(f, x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f, x),\ \Delta_h^m(f, x) := \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, \cdot), x) =$$
$$= (S_h - \mathbb{I})^m(f, x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{i}S_{h,i}(f, x),\ m = 2, 3, ...$$

Введем обобщенный модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f, t)_2 := \sup\left\{\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|_2 :\ 0 < h \le t\right\}.$$

Излагаемые далее результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля [3]. Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

производную порядка $\alpha \in \mathbb{R}_+$ в смысле Вейля, определенную равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right). \qquad (1)$$

Через $L_2^{(\alpha)}(\alpha \in \mathbb{R}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2(\alpha \in \mathbb{R}_+)$. Если $S_{n-1}\left(f^{(\alpha)}, x\right)$ – частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда (1), то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ элементами $T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}$ равно

$$E_{n-1}\left(f^{(\alpha)}\right)_2 := \inf\left\{ \left\| f^{(\alpha)} - T_{n-1}^{(\alpha)} \right\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1} \right\} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \in \mathbb{N}$. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$, q *— весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(q, h) = \left\{ n^{\alpha p} \int_0^h (1 - sincnt)^{mp} q(t) dt \right\}^{-1/p}.$$

Следствие. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, q *– весовая на* $[0, h]$ $(0 < h \le 3\pi/(4n))$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f \ne const}} \frac{n^{\alpha-\beta} E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p \left(f^{(\alpha)}, t\right)_2 q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h (1 - sincnt)^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Более полные результаты изложены в работе [4].

Литература

1. *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2. — Матем. заметки. 2012, т.92, вып.4, с.497-514.

2. *Шабозов М.Ш., Тухлиев К.* Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2. — Матем. заметки. 2013, т.94, вып.6, с.908-917.

3. *Weyl H.* Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich. 1917, v.62, pp.296-302.

4. *Шабозов М.Ш., Шабозова А.А.* Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 — Тр. ИММ УрО РАН, 2019, т.25, №4, с.255–264.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе

Використання сплайнів для зміни розміру зображень

О.О. Шумейко

Сплайни широко використовуються в різноманітних задачах комп'ютерної графіки, в тому числі і в задачі ресемплінгу (зміни геометричних розмірів растрового зображення). Такими задачами займалися А.О.Лигун, В.Ф.Бабенко, J.A.Parker, R.Kenyon та ін.

Запропоновано для даної задачі використовувати тензорний добуток локальних параболічних сплайнів

$$S_{2,2}(P,u,v) = \sum_{(i,j)\in Z^2} P_{i,j} N_{2,2}\left(u - \left(i+\frac{1}{2}\right), v - \left(j+\frac{1}{2}\right)\right),$$

де $(u,v) \in R^2$, $N_{2,2} \equiv B_2(u)\cdot B_2(v)$- нормалізований тензорний добуток B-сплайнів другого порядку на гратках (i,j).

Побудовані та використані сплайни - $S_{2,2,i}$ майже інтерполяційні та $S_{2,2,a}$ майже інтерполяційні у середньому.

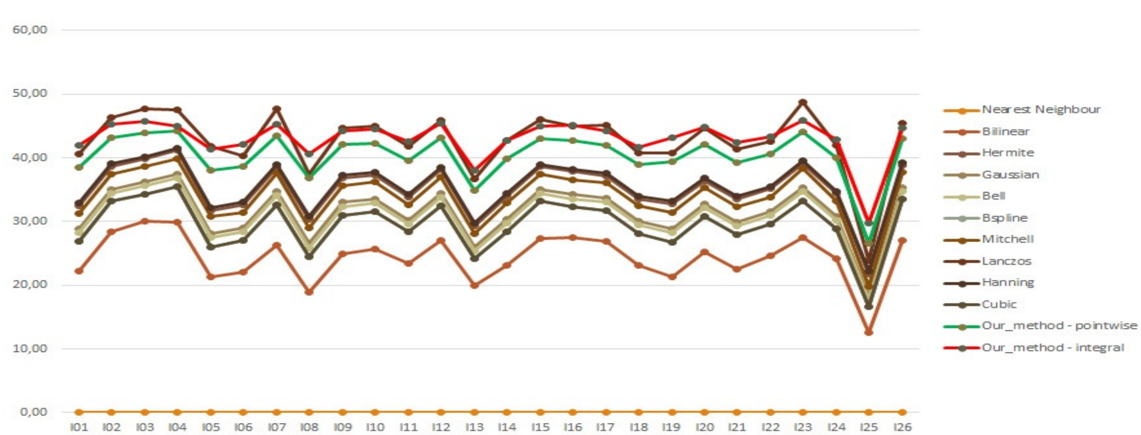
Для порівняння отриманих результатів використана база тестових зображень TID2008 та множина відомих методів ресемплінгу зображень.

Тестові зображення спочатку були збільшені вдвічі, потім конвертовані до оригінального розміру одним і тим же алгоритмом, після чого було знайдено відхилення у PSNR:

$$PSNR(I,J) = 20\log_{10}\frac{255}{\sqrt{\frac{1}{H\times W}\sum_{i=1}^{H}\sum_{j=1}^{W}\left(I(i,j)-J(i,j)\right)^2}}$$

де $H \times W$ розмір оригінального зображення.

Результати наведені на наступній діаграмі.



Дніпровський державний
технічний університет
e-mail: shumeikoalex@gmail.com

О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди

Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров

В работе найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего совместного среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка граничных значений в пространстве Харди. Аналитическая в единичном круге $U := \{z : |z| < 1\}$ функция [1]

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1,\ 0 \le t \le 2\pi,$$

принадлежит пространству Харди $\mathscr{H}_p,\ 1 \le p \le \infty$ если

$$\|\Phi\|_p := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_p} = \lim_{\rho\to 1-0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{it})|^p \, dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

Производную m-го порядка функции $\Phi(z) \in \mathscr{H}_p$ определим по формуле

$$\Phi^{(m)}(z) := \frac{\partial^{(m)}\Phi(z)}{\partial z^m} = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(\Phi) z^{k-m},$$

где $\alpha_{k,m} := k(k-1)\cdots(k-m+1),\ k \ge m,\ m \in \mathbb{N}$. Подпространство комплексных алгебраических многочленов вида $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ |a_n| \ne 0,$ степени n обозначим символом $\mathscr{P}_n$. Величину

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf\left\{ \|\Phi^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_p :\ p_{n-1} \in \mathscr{P}_n \right\}$$

называют наилучшим совместным приближением функции Φ и её последовательных производных $\Phi^{(s)}$ $(1 \le s \le m)$ полиномами $p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}$.

Теорема 1. *Для произвольной функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \ge s$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} E_{n-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}. \tag{1}$$

Существует функция $G \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, для которой неравенство (1) обращаются в равенство.

Характеристику гладкости произвольной функции $\Phi(z) \in \mathscr{H}_p, (1 \le p \le \infty)$ будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности r-го порядка её граничных значений $\Phi(t)$:

$$\omega_r(\Phi, t)_p := \sup\left\{ \Big\| \sum_{l=0}^{r} (-1)^l\, C_r^l \Phi(\cdot + (r-l)\tau) \Big\|_{L_p} : |\tau| \le t \right\}. \tag{2}$$

Далее, рассматривается случай $p = 2$. В этом случае непосредственным вычислением из (2) получаем

$$\omega_r^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} = 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 |c_k(\Phi)|^2 (1-\cos(k-m)h)^r.$$

В следующем утверждении приведено точное равенство, содержащее наилучшее приближение $E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}$ функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ и усреднённое значение модуля непрерывности $\omega_r(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}$.

Теорема 2. *Для любых* $n, r \in \mathbb{N},\ m, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > m \ge s$ *и любого числа* $h \in \mathbb{R}_+$, *для которой* $0 < h \le \pi/(n-m)$, *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\, E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right) dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2\Big((n-m)h - Si((n-m)h)\Big)}\right\}^{r/2},$$

где $Si(u) := \int\limits_0^u \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$ — *интегральный синус.*

Отметим, что аналогичные задачи были рассмотрены также в работах [2, 3, 4].

Литература

1. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. — Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с.155-162.

2. *Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций пространстве Харди H_2. — Матем. заметки, 2000, т.68, №5, с.796-800.

3. *Юсупов Г.А., Миркалонова М.М.* О точных значениях n-поперечников на классах функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков в пространстве Харди. — ДАН РТ, 2008, т.51, №10, с.722-729.

4. *Юсупов Г.А.* О наилучших линейных методах приближения функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $0 < R \le 1$. — ДАН РТ, 2013, т.56, №12, с.946-953.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе

Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева, г.Хорог

Наилучшее совместное приближение аналитических функций в пространстве Харди

Г.А. Юсупов, М.М. Миркалонова

Работа посвящена нахождению точного значения наилучшего совместного приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Харди $\mathscr{H}_2$. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, соответственно, множество натуральных, целых неотрицательных, положительных чисел. $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел вида $c := a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Будем говорить, что аналитическая в единичном круге $U := \{z : \ |z| < 1\}$ функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k, \ z = \rho e^{it}, \ 0 \le \rho < 1, \ 0 \le t \le 2\pi \tag{1}$$

принадлежит пространству Харди $\mathscr{H}_p$ $(1 \le p \le \infty)$, если [1, 2]

$$\|\Phi\|_p := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_p} = \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty. \tag{2}$$

При этом угловое граничное значение $\Phi(z)$ обозначим $\Phi(t) := \Phi(e^{it}) = \lim\limits_{\rho \to 1-0} \Phi(\rho e^{it})$. Производную m-го порядка функции $\Phi(z)$ определим равенством

$$\Phi^{(m)}(z) := \frac{\partial^{(m)} \Phi(z)}{\partial z^m} = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) c_k(\Phi) z^{k-m}, \tag{3}$$

где $\alpha_{k,m} = k(k-1)\cdots(k-m+1), \ k \ge m, \ m \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\mathscr{H}_p^{(m)} := \left\{ \Phi(z) \in \mathscr{H}_p : \|\Phi^{(m)}\|_{\mathscr{H}_p} < \infty \right\}, \ \ 1 \le p \le \infty.$$

Через $\mathscr{P}_n$ обозначим подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n. Хорошо известно, что наравне с функцией $\Phi(z) \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ её последовательные производные $\Phi^{(s)}(z)$ $(s = 0, 1, 2, ..., m)$ также принадлежат пространству $\mathscr{H}_2^{(m)}$, а потому несомненный интерес представляет отыскание точного значения величины

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf \left\{ \left\| \Phi^{(s)} - p_n^{(s)} \right\|_{\mathscr{H}_2} : \ p_n \in \mathscr{P}_n \right\}. \tag{4}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $m, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$ и $0 < (n-m)h \leq \pi$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{h^r \big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big) E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right\}^{r/2}} = \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}.$$

Наилучшее совместное среднеквадратическое приближение множества $\mathbf{m}^{(m)}$ подпространством тригонометрических полиномов $\mathscr{T}_{n-1}$ обозначим символом

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathbf{m}^{(m)}\big) := \mathscr{E}^{(s)}\big(\mathbf{m}^{(m)}, \mathscr{T}_{n-1}\big)_{\mathscr{H}_2} = \sup\left\{E_{n-s-1}\big(\Phi^{(s)}\big)_{\mathscr{H}_2} :\ \Phi \in \mathbf{m}^{(m)}\right\}. \quad (5)$$

Для произвольных натуральных m, r и $0 < h \leq 2\pi$ введём в рассмотрение следующий класс функций

$$W_r^{(m)}(h) := \left\{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} :\ \int\limits_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2}\, dt \leq 1\right\}.$$

Теорема 2. *При всех $r, n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любых $h > 0$, для которых $0 < (n-m)h \leq \pi$, справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\big(W_r^{(m)}(h)\big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\, h^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}.$$

Литература

1. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. — Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с.155-162.

2. *Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций пространстве Харди H_2. — Матем. заметки, 2000, т.68, №5, с.796-800.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе

Наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова

С.Я. Янченко

Нехай $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою, $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ $\big(\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_d),\, r_j>0,\, j=\overline{1,d}\big)$ — анізотропні класи Нікольського–Бєсова (див., наприклад [1]).

Далі, нехай функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ представлена інтегралом Фур'є

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}, \text{ де } \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) \text{— перетворення Фур'є функції } f,$$

і $D_{\boldsymbol{a}^s} = D_{a_1^s,\ldots,a_d^s}$ — d-вимірний паралелепіпед: $|\lambda_j| < a_j^s$, $j=\overline{1,d}$, $s \geqslant 0$, $\Gamma_{\boldsymbol{a}^s} = D_{\boldsymbol{a}^s} - D_{\boldsymbol{a}^{s-1}}$ при $s \geqslant 1$ та $\Gamma_{\boldsymbol{a}^0} = D_{\boldsymbol{a}^0}$. Покладемо

$$f_{\boldsymbol{a}^s} := S_{\boldsymbol{a}^s}(f) - S_{\boldsymbol{a}^{s-1}}(f) = \int_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda},\ s \geqslant 1, \quad f_{\boldsymbol{a}^0} = S_{\boldsymbol{a}^0}(f),$$

$$S_{\boldsymbol{a}^s}(f) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-{a_1}^s}^{{a_1}^s} \ldots \int_{-{a_d}^s}^{{a_d}^s} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Розглянемо величину $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_p := \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, і для функціонального класу $F \subset L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(F)_p = \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_p$.

$E_{\boldsymbol{\nu}}(f)_p := \inf\limits_{g_{\boldsymbol{\nu}}} \|f - g_{\boldsymbol{\nu}}\|_p$ — найкраще наближенням функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, де $g_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}) \in L_p$ ціла функція степеня $\boldsymbol{\nu} = \nu_1,\ldots,\nu_d$ по кожній змінній $x_1,\ldots,x_d$ відповідно.

Теорема 1. *Нехай $1 < p \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді для $g(\boldsymbol{r}) > d\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)$, має місце порядкове співвідношення*

$$E_{\boldsymbol{a}^n}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)},$$

де $\frac{1}{g(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \frac{1}{r_j}$, $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j=\overline{1,d}$.

Теорема 2. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді для $g(\boldsymbol{r}) > \frac{d}{p}$ має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_\infty \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - \frac{d}{p}\right)}.$$

1. Лизоркин П. И. Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$. Сиб. мат. журн., 1968, 9, №5, С. 1127–1152.

Інститут математики
НАН України
e-mail: yan.sergiy@gmail.com

ЗМІСТ

Abdullayev F.G. Bernstein-Nikolskii-type inequalities for algebraic polynomials in Bergman space 3

Abdullayev F.G., Chaichenko S.O., Shidlich A.L. Jackson type inequalities in the Musielak-Orlicz type spaces 4

Abdullayev F.G., Serdyuk A.S., Shidlich A.L. Widths of functional classes defined by majorants of generalized moduli of smoothness in $\mathcal{S}^p$ 5

Babenko V.F., Babenko V.V., Kovalenko O.V. Korneichuk-Stechkin Lemma for L-space Valued Functions and Some Applications 6

Babenko V.V., Babenko V.F. Optimal recovery and best approximation in function L-spaces 7

Babenko V.F., Babenko Yu.V., Kriachko N.A., Skorokhodov D.S. Sharp Inequalities for the Norms of Multiple Closed Operators on Hilbert Space 8

Chernetska L.O. Study of Padé-type approximants for pseudo-twovariate functions 9

Chernitskaya O.V. Best approximation constants for trigonometric functions 10

Davydov O. Spectral Convergence and Stability of a B-Spline Method for Heat Equation 11

Davydov O., Kozynenko O., Skorokhodov D. Adaptive approximation by sums of piecewise polynomials on sparse grids 12

Karagulian G.A., Katkovskaya I.N., Krotov V.G. The Abstract Approximations of the Identity 13

Karupu O.W. On some finite difference properties of conformal homeomorphisms 14

Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of Approximation of Functions from Lipschitz Classes by Conjugate Poisson Integrals 15

Kofanov V.A. On correlation sharp Kolmogorov type inequalities with sharp Kolmogorov-Remez type inequalities 16

Kovalenko O. V. On optimal recovery of integrals of random processes 17

Kuchminska K.Y. On the Śleszyńsky-Pringsheim Theorem for Three-dimensional Generalization of Continued Fraction 18

Mikhailets V.A., Murach A.A. General Forms of the Menshov-Rademacher, Tandori, and Orlicz Theorems 19

Oskolkov K.I. A "surprise"in optimization of quadrature formulas on classes of periodic functions 20

Parfinovych N.V.. The best approximation of classes of differentiable functions by splines 21

Pasko A.M. The pointwise one-sided approximation to the class $\breve{W}^r_\infty$, $0 < r < 1$ 22

Pozharska K.V., Ullrich T. Recovery of Non-Periodic Functions from Random Samples in the Uniform Norm 23

Radzievskaya E.I. On uniform convergence of Fourier series 24

Serdyuk A.S., Sokolenko I.V. Asymptotic estimates for the best uniform approximations of classes of convolution of periodic functions of high smoothness 25

Serdyuk A.S., Stepanyuk T.A. Uniform approximations by Fourier sums on classes $C^\psi_{\beta,1}$ 26

Shanin R. Reverse Hölder inequality 27

Yanovich L.A., Ignatenko M.V. Interpolation Formulas with Nodes of the Third Multiplicity Containing Variational Derivatives 28

Ullrich T. A New Upper Bound for Sampling Numbers 29

Абдулхаминов М.А. Наилучшее полиномиальное приближение в пространстве L_2 30

Акобиршоев М.О., Сайнаков В.Д. Наилучшее приближение «углом» в пространстве $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита 32

Бабенко В.Ф., Біліченко Р.О. Задача про відновлення значень нормального оператора 33

Бовсуновська В.В., Гаєвський М.В., Задерей П.В. Нерівність Лебега-Ландау на класах диференційовних функцій комплексної змінної 34

Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Оцінки поперечників класів функцій двох змінних у ваговому просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, $\gamma = \exp(-x^2 - y^2)$ 35

Власик Г.М., Замрій І.В., Шкапа В.В. Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних 36

Гаєвський М.В., Задерей П.В., Задерей Н.М., Нефьодова Г.Д. Наближення класів узагальнено диференційовних функцій сумами Фур'є 37

Гаєвський М.В., Задерей П.В., Задерей Н.М., Нефьодова Г.Д. Мультиплікатори в просторах Харді 38

Гаєвський М.В., Задерей П.В., Задерей Н.М., Ключник І.Г. Достатні умови збіжності рядів Фабера в середині області 39

Гембарський М.В., Гембарська С.Б. Лінійні та колмогоровські поперечники функціональних класів типу Нікольського-Бєсова 40

Гунько М.С., Руденко О.О. Оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією 41

Джурахонов О.А. Оценки скорости сходимости «гиперболических» частных сумм двойного ряда Фурье по общим ортогональным многочленам 42

Дзюбенко Г.А. Комонотонне наближення тригонометричними поліномами 45

Дмитришин Р.І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними 46

Конарева С.В. Оцінки апроксимації функції зі значеннями в гільбертовому просторі 47

Кореновский А.А. О лемме Рисса ''о восходящем солнце'' 48

Кузнєцов М.В. Закон співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень над простором неперервних функцій 51

Лысенко З.М. О коммутативности алгебры теплицевых операторов 52

Михайлець В.А., Циганок О.В. Тауберові умови збіжності абстрактних та тригонометричних рядів 53

Переверзєв С.В., Семенова Є.В., Солодкий С.Г., Стасюк С.А. Методи зрізки для чисельного диференціювання періодичних функцій двох змінних 54

Петрова Т.О., Петрова І.Л. Про узагальнення поточкових інтерполяційних оцінок опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку 55

Пожарський О. Узагальнені Моментні Зображення та Двовимірні Двоточкові Апроксимації Типу Паде 56

Поляков О.В. Про деякі нерівності типу Джексона 57

Раимзода Ф. О приближении функций и её производных тригонометрическими полиномами в L_2 58

Романюк А.С., Романюк В.С. Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського-Бєсова 60

Савкіна М.Ю. Рівність оцінок МНК та Ейткена параметрів квадратичної моделі регресії у випадку гетероскедастичних відхилень 61

Савчук В.В., Савчук М.В. Опис класу Шура в термінах коефіцієнтів ряду за базисом Лагера 62

Сердюк А.С., Грабова У.З. Порядкові оцінки рівномірних наближень сумами Зигмунда на класах згорток періодичних функцій 63

Слюсарчук В.Ю. Наближення задач Коші задачами Коші без розв'язків і з багатьма розв'язками 64

Ткаченко М.Є., Трактинська В.М. Критерій елемента найкращого наближення функцій багатьох змінних у просторі $L_{1,p_2,\dots,p_n}$ 65

Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У. Неравенства между наилучшими совместными полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана $\mathscr{B}_2$ 66

Шабозов М.Ш., Алаа Сайфулрахман-ал-Курайши Неравенства между наилучшим приближением и неклассическим модулем непрерывности в пространстве L_2 68

Шабозова А.А. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для дифференцируемых в смысле Вейля функций в $L_2[0, 2\pi]$ 71

Шумейко О.О. Використання сплайнів для зміни розміру зображень 74

Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди 75

Юсупов Г.А., Миркалонова М.М. Наилучшее совместное приближение аналитических функций в пространстве Харди 77

Янченко С.Я. Наближення функцій з анізотропних класів Нікольського-Бєсова 79